Государственный институт экономики, финансов, права и технологий

Кафедра высшей математики

И.И. Холявин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие
для студентов экономических вузов

Часть 1

Гатчина
2022

УДК 519.872.339(075.8)

Учебное пособие по дисциплине «Математическое программирование и экономико-математические методы» с программой и контрольными заданиями рассмотрено и рекомендовано к печати на заседании кафедры высшей математики 15 февраля 2022 г. (протокол № 5).
Одобрено Научно-методическим советом ГИЭФПТ.

Автор-составитель: **И.И. Холявин,** к.ф-м.н., доцент.

Рецензент: **В.Н. Куликов**, к.ф-м.н., доцент, зав. кафедрой высшей математики СПбЛТУ.

Содержание

Стр.

Предисловие …………………………………………………….. 4
1. Основы линейного программирования ……………………….. 5
2. Двойственность в линейном программировании ……………. 19
3. Транспортная задача по критерию стоимости ……………..... 22
4. Транспортная задача с усложнениями ………………………… 31
5. Транспортная задача по критерию времени ………………….... 35
6. Задача о назначениях …………………………………………… 37
7. Элементы нелинейного программирования ………………….. 41
8. Дробно-линейное программирование …………………………. 58
9. Задачи целочисленного программирования. Метод Гомори … 64
10. Контрольные вопросы для подготовки к экзамену ………… 69
11. Контрольная работа по математическому программированию и экономико-математическим методам ………………… 70
12. Литература …………………………………………………….. 86

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предмет «Математическое программирование и экономико-математические методы» является частью более общей дисциплины – «Исследование операций» – раздела математики, в котором разрабатываются оптимальные методы управления и даются рекомендации по их применению. В курсе излагаются вопросы применения математических моделей и методов в экономике для профессиональной подготовки бакалавров и специалистов – экономистов и менеджеров.

Целью преподавания дисциплины «Математическое программирование и экономико-математические методы» является обучение студентов математическим методам и моделям для решения экономических задач. В результате изучения курса студенты должны получить основные понятия об экономико-математическом моделировании, симплекс-методе решения задач математического программирования, элементах теории графов, календарного и сетевого планирования, элементах теории игр, параметрического и динамического программирования.

Пособие подготовлено в соответствии с разработанной в Ленинградском областном институте экономики и финансов программой дисциплины «Высшая математика» для студентов, обучающихся по экономическим и смежным специальностям.

Для усвоения рассматриваемых вопросов требуются знания в рамках следующих разделов курса «Высшая математика»: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Математическое программирование», «Теория вероятностей и математическая статистика».

Изучению курса «Математическое программирование и экономико-математические методы» предшествуют установочные лекции, на которых студент заочной формы обучения получает представление о структуре, основных понятиях и фактах и практических приложениях изучаемой дисциплины. Далее студент самостоятельно изучает учебный материал в соответствии с указанной в программе литературой, готовит ответы на контрольные вопросы к зачету, решает контрольную работу. Контрольная работа должна быть выполнена и сдана на рецензирование до начала зачетно-экзаменационной сессии.

Задачи для контрольной работы помещены в разделе 15. Студент должен выбрать номер варианта по следующему правилу: номер задачи должен совпадать с последней цифрой номера зачётной книжки.

Пособие состоит из разделов, разделы – из пунктов. Нумерация формул, таблиц, теорем, рисунков, примеров (в том числе и в контрольной работе) отдельная для каждого раздела.

1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Основные задачи линейного программирования и их формы. Математическое программирование (МП) – это раздел математики, посвященный теории и методам решения оптимизационных задач, т.е. задач об экстремумах функций нескольких переменных на множествах, заданных линейными и нелинейными ограничениями в виде равенств и неравенств. Задачи МП находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных способов действий, например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в задачах проектирования и перспективного планирования. Наименование дисциплины обусловлено тем, что в МП решаются задачи нахождения оптимальной программы (плана) действий. В связи с этим МП является одним из центральных разделов в другой математической дисциплине – исследовании операций.

Задача МП формулируется следующим образом: найти значения переменных x_1^*, x_2^*, …, x_n^*, при которых функция $z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ принимает максимальное (или минимальное) значение и, кроме того, на переменные наложены ограничения в виде равенств и неравенств.

Будем кратко записывать задачу в следующей форме:

$$z(x_1,x_2,\dots,x_n)\to\max\ (\min), \qquad (1)$$

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0,\ i=1\div k, \qquad (2)$$

$$h_j(x_1,x_2,\dots,x_n)=0,\ j=1\div m. \qquad (3)$$

Функция z называется **целевой функцией**. В конкретных задачах могут отсутствовать ограничения-равенства, либо ограничения-неравенства. Может случиться, что на переменные вообще не накладываются никакие ограничения.

Набор чисел $\mathbf{X}(x_1,x_2,\dots,x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2), (3), называется **допустимым решением задачи** (или **допустимым планом**). Все допустимые решения образуют **область допустимых решений задачи (ОДР)**. Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего максимума (минимума), называется **оптимальным решением** (если оно существует).

В виде моделей МП могут быть представлены и решены задачи оптимизации из следующих областей:

1) планирование и организация производства;
2) оптимальное управление динамическими системами и процессами;
3) инженерный анализ и обработка больших потоков информации;
4) определение оптимальных маршрутов транспорта.

Этот список может быть значительно расширен. Приведём несколько примеров задач МП.

Задача 1 (**задача оптимального планирования и организации производства**). Для сборки двух приборов α и β применяют три типа микросхем *A, B, C*. На один прибор α затрачивается 3 микросхемы *A* и по 2 микросхемы *B* и *C,* а на один прибор β соответственно 2 микросхемы *A,* 4 микросхемы *B* и 3 микросхемы *C*. Запас микросхем *A, B, C* соответственно 27, 28 и 23 шт. Сколько приборов каждого вида необходимо собрать для получения максимального дохода, если стоимость одного прибора α 4 руб., а β – 20 руб.

■ Приведенные выше условия являются **экономической постановкой задачи**. Составим теперь **математическую модель (постановку) задачи**. Пусть x_1, x_2 – количество приборов α и β соответственно, планируемое к выпуску. Тогда суммарная стоимость всей плановой продукции (целевая функция) составит $z=4x_1+7x_2\to\max$. При этом общий расход микросхем *A* равен $3x_1+2x_2$, и он не должен превышать имеющегося запаса 27. Это приводит к ограничению $3x_1+2x_2\le 27$. Аналогично учитываются ограничения по микросхемам *B* и *C*: $2x_1+4x_2\le 28$, $2x_1+3x_2\le 23$. Т.к. объёмы выпускаемых изделий не могут быть отрицательны, то $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$. Т.о., математическая модель задачи имеет вид:

$$z=4x_1+7x_2\to\max, \tag{4}$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 27, \\ 2x_1+4x_2\le 28, \\ 2x_1+3x_2\le 23, \end{cases} \tag{5}$$

$$x_i\ge 0,\ i=1\div 2. \tag{6}$$

Таким образом, задача состоится в том, чтобы найти неотрицательные значения x_j, $j=1\div 2$, удовлетворяющие ограничениям (5), для которых функция z принимает наибольшее значение. ●

Задача 2 (**транспортная задача (ТЗ) по критерию стоимости**). Пусть некоторый однородный товар (кирпич, пиломатериалы и т.п.) хранится на m складах A_i ($i=1\div m$) и требуется в n пунктах B_j ($j=1\div n$). Известны следующие параметры: a_i – запас товара на i-м складе; b_j – потребность в товаре в j-м пункте; c_{ij} – стоимость перевозки единицы товара из i-го склада в j-й пункт. Предполагается, что стоимость перевозки произвольного количества товара пропорциональна этому количеству. Требуется составить план перевозок товара так, чтобы удовлетворить потребности при имеющихся запасах, обеспечив при этом наименьшую суммарную стоимость перевозок.

■ Приведённые выше условия – **экономическая постановка задачи**. Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого из i-го склада в j-й пункт. Стоимость перевозки товара из A_i в B_j составит $c_{ij}x_{ij}$, а суммарная стоимость перевозок есть $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$. Следовательно,

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \to \min . \qquad (7)$$

Далее, все запасы из пункта A_i должны быть вывезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1\div m. \qquad (8)$$

Все потребности пункта B_j должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1\div n. \qquad (9)$$

Естественно предполагать также, что

$$x_{ij}\geq 0,\ i=1\div m,\ j=1\div n. \qquad (10)$$

Т.о., **математическая модель** ТЗ состоит в определении неотрицательного плана перевозок $\mathbf{X}=(x_{ij})$, для которого выполняются условия (8) и (9), а целевая функция (7) принимает наименьшее значение. Матрица $\mathbf{X}=(x_{ij})_{m\times n}$ называется **матрицей перевозок**. ●

Если в задаче МП целевая функция, а также уравнения и неравенства системы ограничений линейны, то такая задача называется задачей **линейного программирования (ЛП).**

Различают три основные формы ЛП.

Стандартная форма – все ограничения являются ограничениями-неравенствами, а все переменные неотрицательны (удобна при решении задач ЛП графическим методом).

Каноническая форма – все ограничения являются ограничениями-равенствами с неотрицательными правыми частями, а все переменные неотрицательны. Основные вычислительные методы (симплекс-метод и его варианты) разработаны именно для этой формы.

Общая форма – часть ограничений являются равенствами, часть – неравенствами. Кроме того, не на все переменные наложены условия не отрицательности.

Эти три формы задачи ЛП эквивалентны в том смысле, что каждую из них можно простыми преобразованиями привести к любой из двух остальных. Поэтому, если имеется способ решения одной из этих задач, тем самым мы умеем решать любую из трёх задач ЛП. Приведём следующую задачу ЛП, представленную в общей форме, к канонической форме:

$$z=3x_1+4x_2\to\max,$$
$$2x_1+3x_2=12,$$
$$5x_1-6x_2\leq 7,$$
$$-3x_1+2x_2\leq -4,$$

x_1 не ограничена в знаке, $x_2 \geq 0$.

Проведём следующие преобразования:

1. Т.к. правые части ограничений должны быть неотрицательны, то умножим 3-е ограничение на -1, в результате получим $3x_1-2x_2 \geq 4$.
2. Во 2-м ограничении левая часть не больше правой, поэтому, чтобы их уравнять (сбалансировать), необходимо в левую часть добавить **балансовую** переменную $x_3 \geq 0$. Если данное ограничение определяет расход некоторого ресурса, переменную x_3 следует интерпретировать как **остаток,** или неиспользованную часть**,** данного ресурса.
3. В 3-м ограничении левая часть не меньше правой, поэтому, чтобы их сбалансировать, необходимо от левой части отнять **балансовую** переменную $x_4 \geq 0$. Переменную x_4 следует интерпретировать как **избыток,** или перерасход**,** данного ресурса.
4. Любую переменную x_i, не имеющую ограничения в знаке, можно представить как разность двух неотрицательных переменных: $x_i = x_i' - x_i''$, где $x_i', x_i'' \geq 0$. Поэтому в целевой функции и во всех ограничениях необходимо подставить $x_1 = x_1' - x_1''$, где $x_1', x_1'' \geq 0$.

Указанные операции позволяют привести исходную задачу к канонической форме:

$$z=3x_1'-3x_1''+4x_2 \to \max,$$
$$2x_1'-2x_1''+3x_2=12,$$
$$5x_1'-5x_1''-6x_2+x_3=7,$$
$$3x_1'-3x_1''-2x_2+x_4=4,$$
$$x_1',x_1'',x_2,x_3,x_4 \geq 0.$$

Кроме того, необходимо отметить, что **максимизация** некоторой функции **эквивалентна минимизации** той же функции, взятой с противоположным знаком, и наоборот. Например, максимизация функции $z=3x_1-2x_2+4x_3$ эквивалентна минимизации функции $(-z)=-3x_1+2x_2-4x_3$. Эквивалентность означает, что при одной и той же совокупности ограничений оптимальные значения переменных x_1,x_2,x_3 в обоих случаях будут одинаковы. Отличие заключается в том, что при одинаковых числовых значениях целевых функций их знаки будут противоположны.

1.2. Графическое решение задачи ЛП. Если задача ЛП содержит только две переменные, то её можно решить графически. В случае трёх переменных графическое решение становится менее наглядным, а при большем числе переменных – даже невозможным. Несмотря на это, графическое решение позволяет сделать некоторые выводы, которые служат основой для разработки общего метода решения задачи ЛП.

Пример 1. Пусть необходимо найти решение задачи 1 ((4) – (6)) с двумя переменными графическим способом.

■ Сначала строится ОДР, затем на ней ищется z_{max}. Начнём с геометрического представления ОДР. Условия (6) п.1 ограничивают ОДР первой четвертью. Каждое из неравенств (5) п.1 определяет на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств (5), (6) в случае её совместности – их пересечение. Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется в полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае берётся полуплоскость, не содержащая пробной точки. В качестве пробной точки часто удобно брать начало координат $O(0;0)$. Заметим, что при построении ОДР ограничения-неравенства (5) лучше переписать в отрезках:

$$\frac{x_1}{9}+\frac{x_2}{27/2}\le 1,\ \frac{x_1}{14}+\frac{x_2}{7}\le 1,\ \frac{x_1}{23/2}+\frac{x_2}{23/3}\le 1.$$

Как известно, числа, стоящие в знаменателях, показывают, сколько единиц отсекает прямая, соответствующая данному ограничению на той или иной оси. Например, в первом ограничении на оси Ox_1 отсекается 9 единиц, а на оси Ox_2 – $\frac{27}{2}$=13,5 единиц.

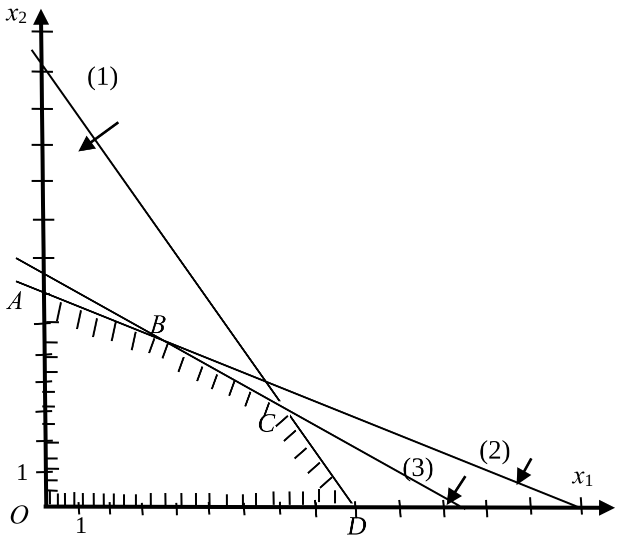

Рис.1

Для нашей задачи ОДР – множество точек пятиугольника $OABCD$ (рис. 1). На рис. 1 цифрами в скобках отмечены номера ограничений (5) в порядке записи, а стрелками указаны области, в которых выполняются соответствующие неравенства.

Кроме выпуклого многоугольника (рис. 1), ОДР может представлять собой неограниченную выпуклую многоугольную область (рис. 2а) или быть пустым множеством (рис. 2б) (в этом случае задача ЛП **не**

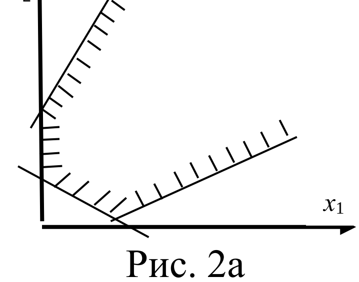

Рис. 2а

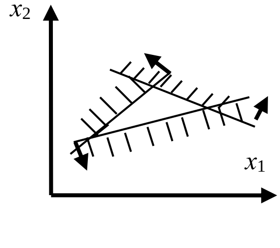

Рис. 2б

имеет решения по причине пустоты ОДР), а также луч, отрезок или точку.

Перейдём к геометрической интерпретации целевой функции (4). Уравнение $z=c_1x_1+c_2x_2=4x_1+7x_2$ при фиксированном значении $z=z_0$ определяет на плоскости прямую линию $z_0=4x_1+7x_2$. При изменении z получим семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня.** Вектор $\mathbf{c}=(c_1;c_2)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор **c** (**-c**) показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

Если построить на одном рисунке ОДР, вектор **c** и одну из линий уровня, например, $z=0$, то задача сводится к определению в ОДР точки в направлении вектора **c** (**-c**), через которую проходит линия уровня z_{max} (z_{min}), соответствующая наибольшему (наименьшему) значения функции z. (Т.к. вектор **c** необходим лишь для выяснения направления возрастания целевой функции, иногда для большей наглядности удобно строить вектор $\lambda\mathbf{c}$ ($\lambda>0$)). Перпендикулярно к вектору **c** прово-

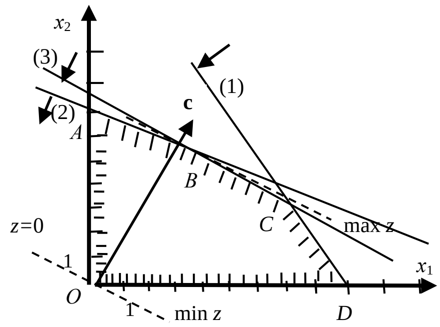

Рис.3а

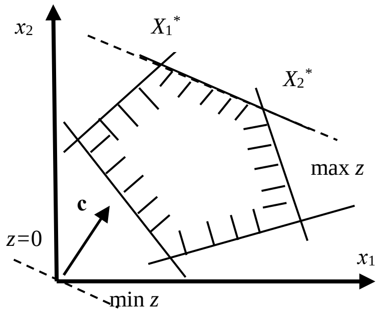

Рис.3б

дим линию уровня z=0. Параллельным перемещением прямой z=0 находим крайнюю точку, в которой целевая функция достигает максимума (рис.3а). Т.к. точка B находится на пересечении прямых (2) и (3), то координаты точки B определяются системой уравнений $\begin{cases} 2x_1+3x_2=23, \\ 2x_1+4x_2=28, \end{cases}$ откуда $B(4;5)$, $z_{max}=z(B)=4\cdot4+7\cdot5=51$. Это и есть **графический способ решения задачи ЛП.**

Полученное решение означает, что необходимо выпускать 4 прибора α и 5 приборов β. При этом прибыль будет максимальной – 51 руб. ●

Если задача разрешима, то, кроме данного случая единственного решения, задача может иметь бесконечное множество решений – **альтернативный оптимум** (рис. 3б). В этом случае прямая, соответствующая целевой функции, параллельна прямой, соответствующей одному из связывающих ограничений. Ограничение называют **связывающим,** если прямая, его представляющая, проходит через оптимальную точку.

Если ОДР – многоугольная область, то целевая функция может быть не ограничена (рис. 4а,б). В этом случае задача ЛП не имеет решения **по причине неограниченности целевой функции.**

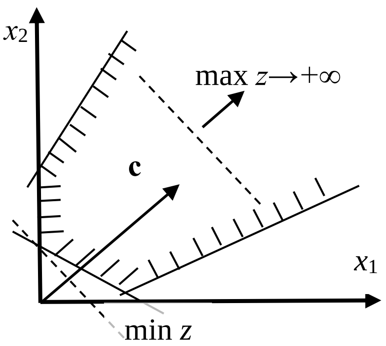

Рис.4а

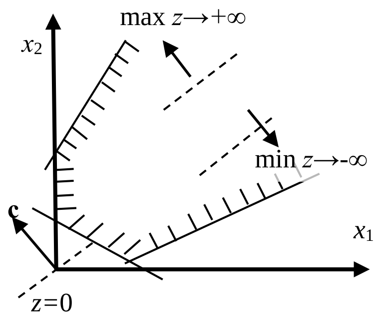

Рис.4б

1.3. Основы симплекс-метода. Задачи, решаемые с помощью симплекс-метода, должны обладать следующими двумя свойствами:
–система ограничений является системой уравнений с базисом;
–свободные члены всех уравнений в системе неотрицательны.

Как известно, система уравнений имеет допустимый базис, если в каждом уравнении есть переменная (с коэффициентом +1), не входящая больше ни в какое другое уравнение. Эти переменные называются **базисными**. Все остальные переменные называются **свободными.** Решение называется **базисным,** если свободные переменные положить равными нулю. Не все задачи ЛП имеют выделенный допустимый базис. Рассмотрим задачу с базисом:

$$z=\sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \to \max, \qquad (11)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (12)$$

$$x_j \geq 0,\ j=1 \div n+m,\ m<n,\ b_i \geq 0. \qquad (13)$$

К такой канонической задаче, в частности, приводится задача ЛП, в которой все ограничения являются неравенствами $\leq$. Выразим базисные переменные $x_{n+1},\dots,x_{n+m}$ из равенств (12) через свободные $x_1,\dots,x_n$ и подставим их в целевую функцию. После группировки подобных членов получим

$$z=\Delta_0-\sum_{j=1}^{n+m} \Delta_j x_j, \qquad (14)$$

где

$$\Delta_0=\sum_{k=1}^{m} c_{n+k} b_k, \qquad (15)$$

$$\Delta_j=z_j-c_j=\sum_{k=1}^{m} c_{n+k} a_{kj} - c_j,\ j=1 \div n;\ \Delta_j=0,\ j=n+1 \div n+m. \qquad (16)$$

С учётом равенств (14) – (16) задача (11) – (13) примет вид:

$$z=\Delta_0-\sum_{j=1}^{n+m}\Delta_j x_j\,, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i,\ i=1\div m, \tag{18}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1\div n+m. \tag{19}$$

Задачу (17) – (19) записываем в начальную симплекс-таблицу. В первой строке (z-строке или оценочной) таблицы указываются элементы Δ_j. В первом столбце таблицы – базисные переменные (БП) x_{n+1}, ..., x_{n+m}, значения которых приведены в столбце «Решение» (при этом свободные переменные равны нулю).

БП	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	Реш.
z	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	0	…	0	Δ_0
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m

Замечание 1. Часто целевая функция z с самого начала зависит только от свободных переменных. Тогда $\Delta_j=-c_j$, $j=1\div n$.

Опорный план, соответствующий данной таблице, есть $\mathbf{X}=(\underbrace{0;\ldots;0}_{n};b_1;b_2;\ldots;b_m)$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть исходная задача решается на максимум (минимум). Если для некоторого опорного плана все оценки Δ_j ($j=1\div n+m$) неотрицательны (не положительны), то такой план оптимален.

Т.о., имеем **алгоритм** нахождения оптимального плана симплекс-методом (для задачи на максимум):

1. Проверяем выполнение критерия оптимальности – наличие в z-строке отрицательных коэффициентов $\Delta_j<0$. Если таковых нет, то решение оптимально, $z_{\max}=\Delta_0$, базисные переменные принимают значения b_i, свободные переменные равны 0, т.е. получаем **оптимальное базисное решение**.

2. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент $\Delta_j<0$ в z-строке определяет **разрешающий столбец** q.

Заметим, что в качестве разрешающего столбца можно выбрать любой столбец j с отрицательным коэффициентом $\Delta_j<0$ в z-строке. Но выбор наибольшего по модулю в большинстве случаев позволяет достичь оптимального решения быстрее.

Для всех строк, у которых $a_{iq}>0$, составляем отношения $\mu_i=\dfrac{b_i}{a_{iq}}$ и определяем наименьшее из них. Если все $a_{iq} \le 0$ (т. е. невозможно выбрать разрешающую строку), то задача не имеет конечного оптимума ($z_{\max} \to \infty$). Если $a_{iq}>0$ существуют, то выбираем строку p, на котором достигается $\min \mu_i$ по всем $a_{iq}>0$ (**разрешающая строка**). На пересечении разрешающих строки и столбца находится **разрешающий элемент** a_{pq}.

3. Переходим к следующей таблице по правилам:

а) в левом столбце записываем новый базис: вместо прежней базисной переменной x_p – новую x_q;

б) новую строку с номером p получаем из прежней делением на разрешающий элемент a_{pq};

в) все остальные элементы вычисляем по **правилу прямоугольника**:

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{iq}a_{pj}}{a_{pq}}, i \ne p \\ a'_{pj} = \dfrac{a_{pj}}{a_{pq}} \end{cases} ; j = 1 \div n+m, \quad \begin{cases} b'_i = b_i - \dfrac{a_{iq}b_p}{a_{pq}}, i \ne p \\ b'_p = \dfrac{b_p}{a_{pq}} \end{cases} ; \begin{cases} \Delta'_j = \Delta_j - \dfrac{\Delta_q a_{pj}}{a_{pq}}, j = 1 \div n+m \\ \Delta'_0 = \Delta_0 - \dfrac{\Delta_q b_p}{a_{pq}}. \end{cases} .$$

Далее переходим к п.1 алгоритма.

Замечание 2. При решении задачи на минимум, кроме критерия оптимальности, меняется выбор разрешающего столбца. Он выбирается по наибольшему (положительному) коэффициенту Δ_j. Остальные пункты алгоритма сохраняются.

Т.о., следующая таблица (итерация) получается методом исключения переменных. Этот метод включает вычислительные процедуры двух типов.

Тип 1 (формирование разрешающей строки):

Новая разрешающая строка = Предыдущая разрешающая строка/(Разрешающий элемент).

Тип 2 (формирование остальных строк, включая z-строку):

Новая строка = Предыдущая строка - (Коэффициент разрешающего столбца предыдущей строки)·(Новая разрешающая строка).

Выполнение процедуры типа 1 приводит к тому, что в новой разрешающей строке разрешающий элемент становится равным единице. В результате выполнения процедуры типа 2 все остальные коэффициенты разрешающего столбца становятся равными нулю. Это эквивалентно получению базисного решения путём исключения вводимой переменной из всех уравнений (строк), кроме разрешающего.

Пример 2. Решим с помощью симплекс-метода задачу (4) – (6).

■ Запишем задачу в канонической форме, то есть ограничения-неравенства перепишем в виде равенств, добавляя балансовые переменные:

$$z-4x_1-7x_2=0,$$
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=27, \\ 2x_1+4x_2+x_4=28, \\ 2x_1+3x_2+x_5=23, \end{cases} \qquad (20)$$
$$x_i \geq 0,\ i=1 \div 5.$$

Система (20) является системой с базисом, в которой x_3, x_4, x_5 – базисные, а x_1 и x_2 – свободные переменные. Её базисное решение $\mathbf{X}_0$=(0;0;27;28;23), которое является и допустимым.

Запишем начальную симплекс-таблицу (итер. 0). Она состоит из коэффициентов уравнения для z и системы (20) при соответствующих переменных:

Итерация 0

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.	Отн.
z	-4	-7	0	0	0	0	–
x_3	3	2	1	0	0	27	27/2
x_4	2	$\underline{4}$	0	1	0	28	7
x_5	2	3	0	0	1	23	23/3

Первая рабочая строка таблицы (z-строка) заполняется коэффициентами целевой функции с противоположным знаком (замечание 1). В соответствии с п.1 алгоритма убеждаемся, что критерий оптимальности не выполняется – в z-строке имеются отрицательные коэффициенты. Разрешающий столбец x_2 выбран по наибольшему по модулю отрицательному коэффициенту в z-строке, разрешающая строка – x_4 – выбрана по наименьшему отношению столбца решений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца, п.2 алгоритма (столбец «Отношение»; в z-строке отношение не ищется). Это значит, что на следующей итерации переменная x_2 из свободной перейдёт в базисную, а переменная x_4 наоборот, из базисной – в свободную. Таким образом, разрешающим элементом является элемент, находящийся в клетке (x_4, x_2). Здесь и далее в неоптимальных таблицах будем подчёркивать разрешающие элементы.

Строим новую симплекс-таблицу (итер. 1) по правилам п.3 алгоритма. Новыми базисными переменными являются x_3, x_2, x_5. Применяя к исходной таблице процедуру типа 1 алгоритма, мы делим строку x_4 на разрешающий элемент, равный 4. Указанная процедура приводит к следующему:

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.	Отн.
z							
x_3							
x_2	1/2	1	0	1/4	0	7	
x_5							

Чтобы посчитать остальные строки таблицы, выполним процедуры типа 2 алгоритма.

1. z-строка.

Предыдущая z-строка: $(-4 \quad -7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

-(-7)×Новая разрешающая строка: $-(-\frac{7}{2} \quad -7 \quad 0 \quad -\frac{7}{4} \quad 0 \quad -49)$

= Новая z-строка: $(-\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{7}{4} \quad 0 \quad 49)$

2. Строка x_3.

Предыдущая x_3-строка: $(3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 27)$

-(2)×Новая разрешающая строка: $-(1 \quad 2 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 14)$

= Новая x_3-строка: $(2 \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 13)$

3. Строка x_5.

Предыдущая x_5-строка: $(2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 23)$

-(3)×Новая разрешающая строка: $-(\frac{3}{2} \quad 3 \quad 0 \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 21)$

= Новая x_5-строка: $(\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{3}{4} \quad 1 \quad 2)$

Новая симплекс-таблица (итер. 1), полученная с помощью рассмотренных операций, имеет вид:

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.	Отн.
z	-1/2	0	0	7/4	0	49	–
x_3	2	0	1	-1/2	0	13	13/2
x_2	1/2	1	0	1/4	0	7	14
x_5	$\underline{1/2}$	0	0	-3/4	1	2	4

Новое базисное решение $\mathbf{X}_1$=(0;7;13;0;2). В соответствии с п.1 алгоритма опять убеждаемся, что критерий оптимальности не выполняется – в z-строке имеются отрицательный коэффициент; разрешающим столбцом является столбец x_1, разрешающей строкой – строка x_5 (выбрана по наименьшему отношению столбца решений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца, п.2 алгоритма). Это значит, что на следующей итерации переменная x_1 из свободной перейдёт в базисную, а переменная x_5 наоборот, из базисной – в свободную.

Строим новую симплекс-таблицу (итер. 2) по правилам п.5 алгоритма. Новыми базисными переменными являются x_3, x_2, x_1.

Итерация 2

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш.
z	0	0	0	1	1	51
x_3	0	0	1	5/2	-4	5
x_2	0	1	0	1	-1	5
x_1	1	0	0	-3/2	2	4

Полученное решение оптимально, так как в z-строке все коэффициенты неотрицательны. Следовательно, z_{max} =51; оптимальное базисное решение **X***=(4;5;5;0;0). Решение невырожденное, так как ни в одной таблице в столбце «Решения» для базисных переменных нет нулей. Решение безальтернативно, т.к. все коэффициенты z-строки при свободных переменных (x_4, x_5) не равны нулю. ●

Покажем теперь, что между геометрическим методом и алгебраическим (симплекс) методом существует взаимно однозначное соответствие. В таблице «*Итерация* 0» x_1 и x_2 – свободные переменные, следовательно, x_1=x_2=0. На рис.1 находим точку с такими координатами. Это точка *O*. Следовательно, итер. 0 соответствует точке *O* ОДР *OABCD,* $\mathbf{X_0}\leftrightarrow O(0;0)$.

В таблице «*Итерация* 1» x_2=7, а x_1 – свободная переменная, следовательно, x_1=0. На рис.1 находим точку с координатами (0;7). Это точка *A*. Следовательно, итер. 1 соответствует точке *A* области допустимых решений *OABCD,* $\mathbf{X}_1\leftrightarrow A(0;7)$.

Аналогично в таблице «*Итерация* 2» x_1=4, x_2=5, следовательно, итерация 2 соответствует точке *B*(4;5) области допустимых решений *OABDE,* $\mathbf{X}^*\leftrightarrow B(4;5)$. Таким образом, базисным решениям системы линейных уравнений соответствуют вершины ОДР, а симплекс-метод состоит в направленном переборе этих вершин и нахождению оптимальной вершины.

1.4. Симплекс-метод с искусственным базисом. В п. 1.3 рассматривалась задача с начальным базисом. Однако, если ограничение записано в виде равенства или неравенства ≥, нельзя сразу получить **допустимое** начальное базисное решение.

Рассмотрим следующую задачу, не имеющую выделенного базиса:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max, \qquad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=1\div m, \qquad (22)$$

$$x_j \ge 0,\ j=1\div n;\ b_i \ge 0,\ i=1\div m,\ m<n. \qquad (23)$$

В этом случае вводится так называемый **искусственный базис**. К левым частям уравнений, не имеющих базисных переменных, добавляют искусственные переменные R_i. В целевую функцию переменные R_i вводят с коэффициентом -*M*, где *M* – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задаётся. Полученная задача называется ***M*-задачей,** соответствующей исходной. *M*-задача имеет следующий вид:

$$\bar{z}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M\sum_{i=1}^{m} R_i \rightarrow \max, \qquad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i = b_i,\ i=1\div m, \tag{25}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1\div n;\ R_i \geq 0,\ i=1\div m. \tag{26}$$

M-задача имеет опорный план $\mathbf{X}=(\underbrace{0;\ldots;0}_{n};R_1;R_2;\ldots;R_m)$. Поэтому её решение может быть найдено симплекс-методом.

Теорема 2. Если в оптимальном плане M-задачи $\mathbf{X}^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*,R_1^*,R_2^*,\ldots,R_m^*)$ все искусственные переменные $R_i^*=0$ $(i=1\div m)$, то $\mathbf{X}^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ является оптимальным планом задачи (21) – (23).

Замечание 3. В задаче минимизации в целевую функцию переменные R_i вводят с коэффициентом $+M$, т.е. $\bar{z}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M\sum_{i=1}^{m} R_i \to \min$.

При опорном плане $\mathbf{X}=(\underbrace{0;\ldots;0}_{n};R_1;R_2;\ldots;R_m)$ M-задачи $\Delta_0=-M\sum_{k=1}^{m} b_k$, $\Delta_j=z_j-c_j=-M\sum_{k=1}^{m} a_{kj}-c_j$, $j=1\div n$; $\Delta_j=0$, $j=n+1\div n+m$. Т.о., Δ_0 и разности z_j-c_j состоят из двух частей, одна из которых зависит от M, а другая – нет. После вычисления Δ_0 и Δ_j их значения, а также исходные значения M-задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплекс-таблица. При этом в 1-ю строку помещают слагаемые, не содержащие M (т.е. коэффициенты Δ_0 и Δ_j z-строки исходной задачи), а в $(m+2)$-ю (она называется строкой-**оценкой)** – коэффициенты при M, т.е.

$$\Delta_0=-M\sum_{k=1}^{m} b_k,\ \Delta_j=z_j=-M\sum_{k=1}^{m} a_{kj}. \tag{27}$$

Из формул (27) следует, что строка «Оценка» получается суммированием соответствующих коэффициентов строк с искусственными переменными с противоположным знаком. Она будет присутствовать в таблице до тех пор, пока хотя бы одна из искусственных переменных есть в базисе. Т.о., решение задачи разбивается на два этапа:

Этап 1. Разрешающий столбец здесь выбирается по наибольшей по модулю **из отрицательных оценок,** соответствующих свободным переменным. Если таковых не окажется (т. е. невозможно выбрать разрешающий столбец), то задача не имеет решения **по причине пустоты ОДР.** Все остальные вычисления (в том числе и выбор разрешающей строки) проводятся как в алгоритме симплекс-метода п.3. После того, как все искусственные переменные выйдут из базиса (т.е. они примут нулевые значения), переходим к этапу 2.

Этап 2. Оптимальное базисное решение, полученное на этапе 1, используется в качестве начального решения исходной задачи. В результате мы переходим к решению задачи обычным симплекс-методом.

Следовательно, имеем **алгоритм** решения задачи (21) – (23) методом искусственного базиса:

1. Составляем M-задачу (24) – (26).
2. Находим её опорный план.
3. С помощью обычных вычислений симплекс-метода исключаем искусственные переменные из базиса. В результате опорный план исходной задачи (21) – (23), либо устанавливаем её неразрешимость (этап 1).
4. Используя найденный опорный план задачи (21) – (23), либо находим симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливаем её неразрешимость (этап 2).

Пример 3. Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$\begin{gathered} z=4x_1+16x_2\to\max, \\ 3x_1+4x_2\geq 6, \\ x_1+3x_2=3, \\ 2x_1+x_2\leq 4, \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0. \end{gathered} \tag{28}$$

■ Запишем задачу в канонической форме:

$$z=4x_1+16x_2\to\max,$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=6, \\ x_1+3x_2=3, \\ 2x_1+x_2+x_4=4, \end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1\div 4.$$

Система ограничений только одну допустимую базисную переменную x_4, поэтому в первое и второе уравнения добавляем искусственные переменные R_1 и R_2. Получим M-задачу:

$$\begin{gathered} \bar{z}=4x_1+16x_2-M(R_1+R_2)\to\max, \\ \begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3+R_1=6, \\ x_1+3x_2+R_2=3, \\ 2x_1+x_2+x_4=4, \end{cases} \\ x_j\geq 0,\ j=1\div 4,\ R_1\geq 0,\ R_2\geq 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Данная система является системой с базисом, в которой R_1, R_2, x_4 – базисные, а x_1, x_2 и x_3 – свободные переменные. Запишем начальную симплекс-таблицу:

Итерация 0

БП	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Реш.	Отн.
z	-4	-16	0	0	0	0	0	–
R_1	3	4	-1	1	0	0	6	3/2
R_2	1	$\underline{3}$	0	0	1	0	3	1
x_4	2	1	0	0	0	1	4	4

Оц.	-4	-7	1	-1	-1	0

Разрешающий столбец x_2 выбран по наибольшей по модулю отрицательной оценке (-7). Разрешающая строка – R_2 – выбрана по наименьшему отношению столбца решений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца, как и в задаче без искусственных переменных. Это значит, что на следующей итерации переменная x_2 из свободной перейдёт в базисную, а переменная R_2 из базисной - в свободную. Запишем следующие таблицы:

Итерация 1

БП	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Реш.	Отн.
z	4/3	0	0	0	16/30	0	16	–
R_1	<u>5/3</u>	0	-1	1	-4/3	0	2	6/5
x_2	1/3	1	0	0	1/3	0	1	3
x_4	5/3	0	0	0	-1/3	1	3	9/5
Оц.	-5/3	0	1	-1	4/3	0		

Итерация 2

БП	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Реш.
z	0	0	4/5	-4/5	32/5	0	72/5
x_1	1	0	-3/5	3/5	-4/5	0	6/5
x_2	0	1	1/5	-1/5	3/5	0	3/5
x_4	0	0	1	-1	1	1	1

После итер. 1 закончился этап 1. После итер. 2 получено оптимальное решение, так как в z-строке все коэффициенты неотрицательны (кроме коэффициента при искусственной переменной R_2, который не влияет на оптимальность, когда искусственные переменные вышли из базиса). Имеем ответ: z_{max}=72/5(6/5;3/5;0;1). ●

2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Теория двойственности имеет большое значение в ЛП. На её основе разработаны многие численные методы для решения линейных оптимизационных задач, а также критерии оптимальности допустимых решений.

Каждой задаче ЛП можно сопоставить некоторую другую задачу ЛП, называемую двойственной по отношению к исходной или прямой. При этом двойственная задача (ДЗ) составляется согласно следующим правилам:

1. Если целевая функция исходной задачи задаётся на максимум, то целевая функция ДЗ – на минимум, и наоборот.
2. Число переменных в ДЗ равно числу ограничений исходной задачи и наоборот, число ограничений ДЗ равно числу переменных исходной задачи.
3. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции ДЗ являются свободные члены системы ограничений исходной задачи, а свободными членами системы ограничений ДЗ – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.
4. Если переменная x_j исходной задачи может принимать только лишь неотрицательные значения, то j-е ограничение в системе ДЗ являет-

ся неравенством вида ≥. Если же переменная x_j не ограничена в знаке, т.е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-е ограничение в системе ДЗ является уравнением. Аналогично если i-е ограничение в системе исходной задачи является неравенством, то i-я переменная ДЗ $y_i \geq 0$. Если же i-е ограничение есть уравнение, то переменная y_i не ограничена в знаке.

5. Матрицы коэффициентов в системах ограничений двойственных задач являются транспонированными (строки одной матрицы служат соответствующими столбцами другой).

Рассмотрим задачу максимизации, в которой все ограничения являются ограничениями-неравенствами типа ≤ или равенствами и по правилам 1 – 5 построим к ней двойственную. Результат запишем следующим образом:

*Табл.*1

Прямая задача (I)	Двойственная задача (II)
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	$w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1 \div k$	$y_i \geq 0,\ i = 1 \div k$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = k+1 \div m$	y_i не ограничена в знаке
$x_j \geq 0,\ j = 1 \div l$	$\sum a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1 \div l$
x_j не ограничена в знаке	$\sum a_{ij} y_i = c_j,\ j = l+1 \div n$

Пара условий, записанная в одной строке таблицы, называется **парой сопряжённых условий** двойственных задач. Переменные y_i ДЗ, $i=1 \div m$, полученные в табл.1, называются **основными переменными ДЗ**.

Заметим, что если в прямой задаче какое-либо ограничение не является стандартным для задачи максимизации (т.е. неравенством типа ≥), то соответствующая переменная двойственной задачи будет нестандартно ограниченной в знаке:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$

Если по правилам 1 – 5 к задаче II построить ДЗ, то получится исходная задача I. Поэтому говорят, что обе задачи (I и II) образуют пару ДЗ. Пара ДЗ обладает следующими **свойствами**.

Свойство 1 (**неравенство двойственности**). Пусть $\mathbf{X}=(x_1,\ldots,x_n)$ – допустимое решение задачи I со значением целевой функции $z(\mathbf{X})$, а $\mathbf{Y}=(y_1,\ldots,y_m)$ – допустимое решение задачи II со значением целевой функции $w(\mathbf{Y})$. Тогда справедливо неравенство $z(\mathbf{X}) \le w(\mathbf{Y})$.

Свойство 2 (**основная теорема двойственности**). Если одна из ДЗ имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причём для оптимальных решений **X*** и **Y*** задач I и II соответственно выполняется равенство $z(\mathbf{X}^*)=w(\mathbf{Y}^*)$.

Свойство 3 (**критерий оптимальности Л. В. Канторовича**). Пусть $\mathbf{X}^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ – допустимое решение задачи I, а $\mathbf{Y}^*=(y_1^*,\ldots,y_m^*)$ – допустимое решение задачи II. Для того, чтобы эти решения были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^*=0, \ i=1 \div k; \text{ если } x_j^*>0, \text{ то } \sum a_{ij}y_i^* = c_j, \ j=1 \div l.$$

Другими словами, в каждой паре сопряжённых условий ДЗ хотя бы одно нестрогое неравенство должно быть равенством.

Свойство 4. Если в нулевой итерации целевая функция выражена только через свободные переменные, то основными переменными ДЗ являются коэффициенты z-строки при первоначальных базисных переменных прямой задачи. И наоборот, основными переменными прямой задачи являются коэффициенты w-строки при первоначальных базисных переменных ДЗ.

Отсюда, в частности, следует, что решать можно любую задачу из двойственной пары. Естественно, удобнее решать ту, которая представляется менее трудоемкой.

Пример 4. Пользуясь правилами (1) – (5), составим ДЗ к задаче (4) – (6) разд.1.

■ Получим пару двойственных задач:

Прямая задача	Двойственная задача
$z=4x_1+7x_2 \to \max$	$w=27y_1+28y_2+23y_3 \to \min$
$3x_1+2x_2 \le 27$	$y_1 \ge 0$
$2x_1+4x_2 \le 28$	$y_2 \ge 0$
$2x_1+3x_2 \le 23$	$y_3 \ge 0$
$x_1 \ge 0$	$3y_1+2y_2+2y_3 \ge 4$
$x_2 \ge 0$	$2y_1+4y_2+3y_3 \ge 7$

Найдём решение ДЗ по свойству 4 из оптимальной таблицы прямой задачи (итерация 2 решения задачи (20) разд.1). Т.к. первоначальными базисными переменными прямой задачи были x_3, x_4, x_5, то $y^*_1=0$, $y^*_2=1$, $y^*_3=1$. Т.о., имеем ответ ДЗ: $w_{\min}=51(0;\ 1;\ 1)$. ●

Рассмотрим **экономический смысл** двойственных переменных (или двойственных оценок). Используя условие равенства целевых функций прямой и двойственной задач, можно записать:

$$z=w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i =27y_1+28y_2+23y_3.$$

Т.к. z измеряется в рублях (прибыль), а b_i – общее количество i-го ресурса, то переменная y_i должна выражаться в рублях на единицу ресурса i. Т.о., переменные ДЗ y_i представляют **ценность** единицы ресурса. Поэтому их иногда называют **теневыми ценами**. Из свойства 3 пары ДЗ следует, что если по некоторому оптимальному плану производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса b_i, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу. Отсюда следует, что двойственные оценки могут служить **мерой дефицитности ресурсов.** Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет **положительную** оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет **нулевую** оценку. Так, в нашем примере 1 оптимальный план прямой задачи **X***=(4;5;5;0;0). При этом плане 1-е ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: $3\cdot4+2\cdot5=22<27$. Это означает, что расход 1-го ресурса (ДСП) меньше его запаса, т.е. 1-й ресурс избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане ДЗ **Y***=(0; 1; 1) оценка $y^*_1=0$.

Пример 5. Составим ДЗ к задаче (28) разд.1.

■ Получим пару двойственных задач:

Прямая задача	Двойственная задача
$z=4x_1+16x_2\to\max$	$w=6y_1+3y_2+4y_3\to\min$
$3x_1+4x_2\geq6$	$y_1\leq0$
$x_1+3x_2=3$	y_2 не ограничен в знаке
$2x_1+x_2\leq4$	$y_3\geq0$
$x_1\geq0$	$3y_1+y_2+2y_3\geq4$
$x_2\geq0$	$4y_1+3y_2+y_3\geq16$

Найдём решение ДЗ по свойству 4 из оптимальной таблицы прямой задачи (итерация 2 решения задачи (28) разд.1). Т.к. первоначальными базисными переменными прямой задачи были R_1, R_2, x_4, то $y_1=-4/5$, $y_2=32/5$, $y_3=0$. Т.о., имеем ответ ДЗ: $w_{\min}=72/5(-4/5;\ 32/5;\ 0)$. ●

3.ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО КРИТЕРИЮ СТОИМОСТИ

Проблемы, возникающие при рациональной организации перевозок различных грузов, имеют исключительное хозяйственное значение. Математические задачи, к которым можно свести указанные проблемы, называют **транспортными**. Изучение методов решения транспортных задач (ТЗ) важно еще и потому, что большое количество других прикладных задач можно описать математической моделью, сходной с моделью задачи о перевозках, а, следовательно, и решать по аналогичным алгоритмам. При этом качество плана транспортной задачи можно оценивать по различным критериям. Рассмотрим здесь в качестве такого критерия суммарную стоимость перевозок.

Рассмотрим решение ТЗ, экономико-математическая постановка которой приведена в задаче 2 разд.1. Для наглядности условия ТЗ можно представить таблицей (табл. 1).

Табл. 1

A_i \ B_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Если сумма всех запасов равна сумме всех заявок, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{1}$$

то мы имеем ТЗ **закрытого типа**.

Определение 1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (8), (9) п.1, определяемое матрицей перевозок **X**, называется **планом** ТЗ.

Определение 2. План **X***, при котором функция (7) разд.1 принимает своё минимальное значение, называется **оптимальным планом** ТЗ.

Теорема 3. Для того чтобы ТЗ имела допустимые планы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (1).

В случае, если сумма запасов не равна сумме потребностей (заявок), имеем задачу **открытого типа**. Если сумма заявок превышает сумму запасов, вводится **фиктивный поставщик** A_{m+1}, «запас» которого равен разности между суммой заявок и суммой запасов: $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$. В случае, когда сумма запасов превышает сумму заявок, вводится **фиктивный потребитель** B_{n+1}, «заявка» которого равна разности между суммой запасов и суммой заявок: $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j$. Стоимости всех фиктивных перевозок полагают равными нулю. Таким образом, задача открытого типа легко сводится к задаче закрытого типа.

Поскольку ТЗ является задачей линейного программирования, она может быть решена симплекс-методом. Но в силу специфики задачи (каждая переменная входит лишь в два уравнения системы (8), (9) разд.1. и коэффициенты при переменных равны единице) оптимальный план ТЗ может быть получен путем некоторых преобразований транспортной таблицы. Как и в общем случае, оптимальный план ищется среди опорных решений.

Число переменных x_{ij} в ТЗ с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно mn, а число уравнений в системах (8) и (9) разд.1. равно $m+n$. Т.к. в закрытой ТЗ выполняется условие (1), то число линейно независимых уравнений равно $m+n$-1. Следовательно, опорный план ТЗ может иметь не более $m+n$-1 отличных от нуля переменных. Это – базисные переменные.

Если в опорном плане число отличных от нуля переменных равно в точности равно $m+n$-1, то план является **невырожденным**, а если меньше – то **вырожденным.**

Для определения опорного плана существует несколько методов. Рассмотрим два из них – метод северо-западного угла и метод минимальной стоимости.

3.1. Метод северо-западного угла (МСЗУ). Пользуясь табл. 1, будем распределять товар, начиная с левой верхней клетки (1,1), полагая x_{11}=min(a_1,b_1). Если a_1>b_1, то x_{11}=b_1 и потребитель B_1 будет полностью удовлетворён, и значит, надо положить x_{i1}=0, i=2÷m («столбец 1 закрыт»). Переходим в соседнюю ячейку. **Соседней** здесь считается открытая ячейка снизу или справа от данной – в данном случае это ячейка (1,2). Она заполняется с учётом того, что запас пункта A_1 сократился на величину b_1 и составляет a_1-b_1.

Если же b_1>a_1, то запас поставщика A_1 полностью исчерпан, и значит, надо положить x_{1j}=0, j=2÷n («строка 1 закрыта»). Переходим в соседнюю ячейку – ячейку (2,1), учитывая, что потребность пункта B_1 сократилась на величину a_1 и составляет b_1-a_1. Аналогичным образом заполняются ячейки (1,2) или (2,1) и т.д. Последней заполняется ячейка (m,n). Рассмотрим применение этого метода на примере.

Пример 1. Условия ТЗ заданы транспортной таблицей (табл. 2). Требуется составить опорный план перевозок методом северо-западного угла.

■ Проверим, является ли задача закрытой. Т.к. $\sum_i a_i=130\neq\sum_j b_j=110$, то ТЗ открытая. Вводим фиктивного потребителя B_5 $b_5=\sum\limits_i a_i-\sum\limits_j b_j=20$ (табл.3).

Табл. 2

B_j / A_i	45	35	55	65
40	4	1	2	5
60	3	2	3	7
90	4	4	5	2

Табл. 3

B_j / A_i	45	35	55	65
40	4	1	2	5
60	3	2	3	7
90	4	4	5	2
10	0	0	0	0

Будем заполнять таблицу поэтапно.

Этап 1. x_{11}=min(a_1,b_1)=min(40,45)=40. Закрыта 1-я строка. Переходим в следующую ячейку (2, 1) (табл. 4).

Этап 2. x_{12}=min(a_2, b_1-a_1)=min(60,5)=5. Закрыт 1-й столбец. Переходим в следующую ячейку (2,2).

Этап 3. x_{22}=min(55,35)=35. Закрыт 2-й столбец. Переходим в следующую ячейку (2,3).

Этап 4. x_{23}=min(20,55)=20. Закрыта 2-я строка. Переходим в следующую ячейку (3,3).

Таблица 4

B_j / A_i	45	35	55	65
40	4 40	1 –	2 –	5 –
60	3 5	2 35	3 20	7 –
90	4 –	4 –	5 35	2 55
10	0 –	0 –	0 –	0 10

Этап 5. x_{33}=min(90,35)=35. Закрыт 3-й столбец. Переходим в следующую ячейку (3,4).

Этап 6. x_{34}=min(55,65)=55. Закрыта 3-я строка. Переходим в следующую ячейку (4,4).

Этап 7. x_{44}=min(10,10)=10. Закрыты 4-я строка и 4-й столбец. Заполнение таблицы закончено.

Отметим, что число заполненных (базисных) клеток равно $m+n-1=7$, т.е. действительно построен опорный план перевозок.

Получен начальный опорный план с матрицей перевозок

$$\mathbf{X}_{с\text{-}з}=\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 35 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 55 \end{pmatrix}$$

(фиктивные поставщики и потребители в матрице перевозок не указываются). По этому плану из пункта A_1 завезено 40 ед. груза в B_1, из A_2 завезено 5 ед. груза в B_1, 35 – в B_2 и 20 – в B_3, из A_3 35 ед. груза завезены в B_3 и 55 – в B_4.. Те 10 ед. груза, «завезённые» из фиктивного пункта A_4, на самом деле недовезены в B_4. Затраты по плану $\mathbf{X}_{с\text{-}з}$ составляют $z_{с\text{-}з}=4\cdot40+3\cdot5+2\cdot35+3\cdot20+$
$+5\cdot35+2\cdot55=580$ (ден. ед.). ●

Замечание 1. При использовании МСЗУ на каждом этапе, кроме последнего, закрывалась либо строка (т.е. один из поставщиков), либо столбец (т.е. один из потребителей). Может оказаться, что на некотором (не последнем) шаге будут одновременно закрываться и строка, и столбец. Тогда в одну из соседних ячеек (желательно с меньшим тарифом) необходимо поставить нуль в явном виде. Эта ячейка в дальнейшем считается базисной (вырожденная задача).

Замечание 2. При использовании МСЗУ заполнение таблицы происходит чисто механически слева направо сверху вниз без учёта тарифов перевозок. Поэтому полученный опорный план обычно далёк от оптимального. В рассматриваемом далее методе – наименьшей стоимости – порядок заполнения таблицы зависит от тарифов.

3.2. Метод наименьшей стоимости (МНС). При построении опорного плана этим методом сначала заполняется ячейка таблицы с наименьшей стоимостью (если таковых несколько, то можно начинать с любой из них; обычно по порядку – слева направо сверху вниз). При этом либо удовлетворяется заявка соответствующего потребителя, либо исчерпывается запас поставщика. Далее ячейки заполняются в порядке возрастания стоимостей.

Пример 2. Рассмотрим применение МНС на решении той же ТЗ, что в п.3.1 (табл. 2 и 3), и будем поэтапно заполнять табл. 4.

■ *Этап 1.* Начинаем, например, с ячейки (4,1), в которой мы имеем одну из наименьших стоимостей перевозки (c_{41}=0): x_{41}=min(a_4,b_1)=min(10,45)=10. Закрыта 4-я строка. Переходим в следующую ячейку (табл.5).

Этап 2. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (1,2), имеющую наименьшую стоимость (c_{12}=1): x_{12}=min(a_1,b_2)=min(40,35)=35. Закрыт 2-й столбец. Переходим в следующую ячейку.

Таблица 5

B_j / A_i	45	35	55	65
40	4 –	1 35	2 5	5 –
60	3 35	2 –	3 25	7 –
90	4 –	4 –	5 25	2 65
10	0 10	0 –	0 –	0 –

Этап 3. Среди оставшихся ячеек заполняем, например, ячейку (1,3), имеющую одну из наименьших стоимостей (c_{13}=2): x_{13}=min(a_1-b_2, b_3)=min(5,55)=5. Закрыта 1-я строка. Переходим в следующую ячейку.

Этап 4. Среди оставшихся ячеек наименьшую стоимость имеет ячейка (3,4), c_{34}=2. Поэтому x_{34}=min(a_3,b_4)=min(90,65)=65. Закрыт 4-й столбец. Переходим в следующую ячейку.

Этап 5. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (2,1), имеющую одну из наименьших стоимостей (c_{21}=3): x_{21}=min(60,35)=35. Закрыт 1-й столбец. Переходим в следующую ячейку стоимостей, c_{21}=3, . x_{21}=min(a_2, b_1-a_4)=min(60,35)=35. Закрыт 1-й столбец. Переходим в следующую ячейку.

Этап 6. Среди оставшихся ячеек заполняем ячейку (2,4), имеющую наименьшую стоимость (c_{24}=3): x_{24}=min(25, 50)=25. Закрыта 2-я строка. Переходим в следующую ячейку.

Этап 7. Осталась ячейка (3,3): x_{33}=min(25, 25)=25. Закрыты 3-я строка и 3-й столбец.

Заполнение таблицы закончено. Число заполненных (базисных) клеток равно $m+n$-1=7 , т.е. действительно построен опорный план перевозок.

Получен начальный опорный план с матрицей перевозок $\mathbf{X}_{н.ст}=\begin{pmatrix} 0 & 35 & 5 & 0 \\ 35 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 65 \end{pmatrix}$ (фиктивный поставщик в матрице перевозок не указан). По этому плану из пункта A_1 завезено 35 ед. груза в B_2 и 5 – в B_4, из A_2 –35 ед. груза в A_1 и 25 – в B_3, из A_3 – 25 ед. груза в B_3 и 65 – в B_4. Те 10 ед. груза, «завезённые» из фиктивного пункта A_4, на самом деле не довезены в B_1. Затраты по плану $\mathbf{X}_{н.ст}$ составляют $z_{н.ст}$=1·35+2·5+3·35+3·25+5·25+2·65=480 (ден. ед.), что на 100 ед. меньше, чем в МСЗУ. ●

Для МНС также справедливо замечание 2 (о нулевом базисном элементе), только здесь изменяется понятие соседней ячейки. Ячейкой, соседней с данной, считается любая открытая ячейка в данной строке и в данном столбце.

3.3. Определение оптимального плана перевозок методом потенциалов. При решении ТЗ, как и при решении любой задачи ЛП, осуществляется последовательный переход от одного опорного плана (если оно не оптимально) к другому. Для проверки оптимальности полученного плана воспользуемся теорией двойственности. Составим к ТЗ двойственную и запишем их в табл. 6.

Таблица 6

Прямая задача	Двойственная задача
$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$	$w=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max$
$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1\div m$	u_i не огр. в знаке, $i=1\div m$
$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1\div n$	v_j не огр. в знаке, $j=1\div n$
$x_{ij}\ge 0,\ i=1\div m,\ j=1\div n$	$u_i+v_j\le c_{ij},\ i=1\div m,\ j=1\div n$

Переменные ДЗ называются:

u_i – потенциал поставщика A_i, $i=1\div m$;

v_j – потенциал потребителя B_j, $j=1\div n$.

Пользуясь свойством 3 ДЗ (разд. 2), сформулируем в терминах потенциалов критерий оптимальности плана перевозок.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{X^*}=\{x_{ij}^*\}$ – план перевозок ТЗ. Для того, чтобы этот план был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовали потенциалы поставщиков u_i, $i=1\div m$, и потенциалы потребителей v_j, $j=1\div n$, удовлетворяющие условиям:

– сумма потенциалов каждого поставщика и каждого потребителя не превосходит соответствующей стоимости перевозки единицы груза, т.е.

$$u_i + v_j \le c_{ij},\ i = 1 \div m,\ j = 1 \div n; \qquad (2)$$

– если по плану $\mathbf{X^*}$ имеет место перевозка от поставщика A_i потребителю B_j, то сумма их потенциалов равна соответствующей стоимости перевозки единицы груза, т.е. если $x_{ij}^*>0$, то $u_i + v_j = c_{ij}$.

Т.о., чтобы выполнить проверку оптимальности плана перевозок, необходимо для всех занятых ячеек составить систему уравнений относительно потенциалов:

$$u_i+v_j=c_{ij}. \qquad (3)$$

Т.к. занятых ячеек (а, значит, и уравнений (3)) $m+n-1$, а неизвестных потенциалов $m+n$, то одному из неизвестных нужно придать произвольное значение (обычно полагают $u_1=0$), и тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Затем для свободных ячеек проверяются условия (2), или

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\le 0 \qquad (2')$$

(Δ_{ij} называется **оценкой** соответствующей ячейки). Если все эти неравенства выполняются, то, согласно приведённому выше критерию (теор. 4), план перевозок оптимальный. Если хотя бы одно из неравенств (2′) не выполняется, то план не является оптимальным. В этом случае из свободных ячеек с положительной оценкой выбирается та, для которой эта оценка является наибольшей. Если наибольших оценок несколько, то выбирается та из ячеек, где меньше тариф.

В транспортной таблице для выбранной свободной ячейки проводится замкнутая ломаная прямая, звенья которой лежат только в строках или столбцах и соединяют какие-либо две ячейки, а вершины (кроме начальной) расположены в занятых ячейках. Такая ломаная прямая называется **циклом.** Для каждой ячейки можно построить **только один** цикл. Вершинам цикла приписываются чередующиеся знаки «+» и «-», причём свободная ячейка снабжается знаком «+». В ячейках, соответствующих отрицательным вершинам цикла, отыскивается наименьшее значение объёма перевозок, $\alpha=\min x_{ij}^{(-)}$, которое перераспределяется по ячейкам цикла, т.е. прибавляется к переменным в ячейках со знаком «+» и вычитается от переменных в ячейках со знаком «-». В ячейках, не вошедших в цикл, переменные остаются неизменными. Ячейка «-», по которой определялась величина α (для неё $x_{ij}=\alpha$), остаётся пустой. Если таковых ячеек несколько, то одна из них (желательно с большим тарифом) остаётся пустой, а в остальных проставляются нули.

В результате перераспределения перевозок по циклу получается новый план с меньшими затратами. Примеры некоторых циклов показаны на рис. 1.

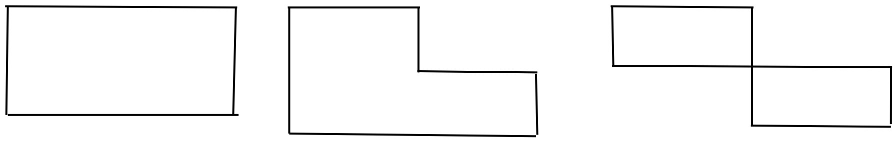

Рис.1.

В новом плане вновь определяются потенциалы поставщиков и потребителей, и производится проверка плана на оптимальность. Когда среди оценок не окажется больше положительных, полученный план будет оптимальным.

Т.о., **алгоритм решения ТЗ** методом потенциалов состоит из следующих этапов:

Этап 1. Составление начального плана перевозок.

Этап 2. Вычисление потенциалов поставщиков и потребителей; проверка оптимальности плана перевозок. Если план оптимальный, то задача решена; иначе следует переход к этапу 3.

Этап 3. Построение нового (улучшенного) плана перевозок, для которого транспортные затраты меньше или, по крайней мере, равны затратам для предыдущего плана. Далее следует переход к этапу 2.

Пример 3. Рассмотрим применение метода потенциалов для нахождения оптимального плана ТЗ, опорный план которой найден МНС (табл. 5).

■ Для определения потенциалов составляем систему уравнений (для **занятых ячеек**)

$u_1+v_2=1$, $u_1+v_3=2$, $u_2+v_1=3$, $u_2+v_3=3$, $u_3+v_3=5$, $u_3+v_4=2$, $u_4+v_1=0$.

Полагая $u_1=0$, находим $v_2=1$, $v_3=2$, $u_2=1$, $v_1=2$, $u_3=3$, $v_4=-1$, $u_4=-2$.

Потенциалы проставлены в табл. 7 (столбец u_i и строка v_j), которую мы обозначим «Итерация 0». Потенциалы можно вычислять и непосредственно в таблице, не выписывая систему уравнений. Если известны потенциал и тариф занятой ячейки, то из соотношения

Таблица 7 (*Итерация* 0)

B_j / A_i	45	35	55	65	u_i
40	4 –	1 35	2 5	5 –	0
60	3 35	2 –	3 25	7 –	1
90	4 –	4 –	5 25	2 65	3
10	0 10	0 –	0 –	0 –	-2

$u_i+v_j=c_{ij}$ легко определить неизвестный по-

v_j	2	1	2	-1	

тенциал (из суммы вычесть известное слагаемое).

Определим оценки **свободных ячеек** ($\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$):
Δ_{11}=0+2-4=-2, Δ_{14}=0+(-1)-5=-6, Δ_{22}=1+1-2=0, Δ_{24}=1+(-1)-7=-7, Δ_{31}=3+2-4=1, Δ_{32}=3+1-4=0, Δ_{42}=(-2)+1-0=-1, Δ_{43}=(-2)+2-0=0, Δ_{44}=(-2)+(-1)-0=-3. Далее оценки будем также вычислять непосредственно в таблице, помещая их в левом нижнем углу каждой свободной ячейки. Т.к. среди оценок есть положительная, то план $\mathbf{X}_0=\mathbf{X}_{н.ст}$ не является оптимальным. Перейдём к этапу 3 – улучшению плана $\mathbf{X}_0$. Для этого выберем ячейку (3,1) (она имеет положительную оценку 1). Из этой ячейки проводим цикл (табл.8). В цикл войдут ячейки (3,1) (отмечается знаком «+»), (3,3) (отмечается знаком «-»), (2,3) (отмечается знаком «+»), (2,1) (отмечается знаком «-»). Наименьшее значение груза, стоящее в вершинах цикла со знаком «-», α=min(25,35)=25. Это число прибавляется к переменным в ячейках со знаком «+» и вычитается от переменных в ячейках со знаком «-». В результате получается новый план с меньшими затратами (табл. 9, итерация 1).

Таблица 8

B_j / A_i	45	35	55	65	u_i
40	4 -2	1 35	2 5	5 -6	0
60	⊖ 3 35	2 0	⊕ 3 25	7 -7	1
90	⊕4 1	4 0	⊖ 5 25	2 65	3
10	0 10	0 -1	0 0	0 -3	-2
v_j	2	1	2	-1	

Таблица 9 (*Итерация* 1)

B_j / A_i	45	35	55	65	u_i
40	4 -2	1 35	2 5	5 -5	0
60	3 10	2 0	3 50	7 -6	1
90	4 25	4 -1	5 -1	2 65	2
10	0 10	0 -1	0 0	0 -2	-2
v_j	2	1	2	0	

Для нового плана $\mathbf{X}_1$ определяем новые потенциалы и оценки свободных ячеек (табл.9). Все оценки неположительные. Следовательно, полученный план

$$\mathbf{X}^{*}=\begin{pmatrix} 0 & 35 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & 50 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}$$

является оптимальным (фиктивного поставщика в ответе не указываем). Кроме того, план не вырожден (базисные переменные не равны нулю) и альтернативен (некоторые оценки $\Delta_{21}=\Delta_{43}=0$). При данном плане стоимость перевозок

z_{min}=1·35+2·5+3·10+3·50+4·25+2·65=455 (ден. ед.). ●

4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОЖНЕНИЯМИ

Часто при решении транспортных задач возникает необходимость введения дополнительных ограничений (условий). Рассмотрим наиболее часто встречающиеся условия, используемые при решении задач транспортного типа.

1. Запрет перевозок от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является столь угодно большой величиной M, и при этом условии известными методами находят решение новой транспортной задачи. При таком предположении исключается возможность при оптимальном плане ТЗ перевозить грузы из A_i в B_j. Такой подход к нахождению решения ТЗ называется **запрещением перевозок** или б**локированием** соответствующей клетки таблицы данных задачи.

2. Фиксированная поставка. В отдельных ТЗ дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам **определенного количества груза**. Пусть, например, из пункта A_i в пункт B_j требуется обязательно перевезти α_{ij} ед.груза. Тогда в ячейку таблицы данных ТЗ, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j, записывают указанное число α_{ij} и в дальнейшем эту ячейку считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M. Для полученной таким образом новой ТЗ находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

3. Нижние границы на поставки. Иногда требуется найти решение ТЗ, при котором из пункта A_i в пункт B_j должно быть завезено **не менее заданного количества груза α_{ij}.** Для определения оптимального плана какой задачи считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше фактических на α_{ij} ед. Далее находят оптимальный план новой ТЗ, на основании которого и определяют решение исходной задачи. После этого к значению переменной x_{ij} добавляют α_{ij}.

4. Верхние границы на поставки. В некоторых ТЗ требуется найти оптимальный план перевозки при условии, что из пункта отправления A_i в пункт B_j перевозится **не более чем α_{ij} единиц груза**, т.е. $x_{ij} \le \alpha_{ij}$. Для сведения условия задачи к разрешимому типу поставщика A_i или потребителя B_j (либо того, либо другого) делят на две части, как бы на два самостоятельных поставщика (или потребителя). При этом мощности этих условно самостоятельных поставщиков будут равны: $A'_i=\alpha_{ij}$ и $A''_i=A_i-\alpha_{ij}$. Затраты на поставку продукции от пос-

$A_i \swarrow\nearrow \begin{matrix} A'_i \\ A''_i \end{matrix}$ или $B_i \swarrow\nearrow \begin{matrix} B'_i \\ B''_i \end{matrix}$. Затраты на поставку продукции от поставщика A'_i к B_j и другим потребителям принимаются равными затратам, заданным в матрице $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\text{x}n}$. Затраты c''_{ij} на поставку продукции от поставщика A''_i к B_j принимаются равными $c''_{ij}=M$, где M – сколь угодно большое число. Затраты на поставку от A''_i к другим потребителям (помимо B_j) принимаются равными заданным в матрице $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\text{x}n}$. Подобный прием обеспечивает положение, при котором переменная $x_{i''j}$ в решении задачи непременно будет равна нулю, в то время как переменная $x_{i'j}$ может принимать любое значение от нуля до a_{ij}, $0 \le x_{ij} \le \alpha_{ij}$. После получения оптимального решения соответствующие переменные поставщиков A'_i и A''_i (или потребителей B'_i и B''_i) складываются.

Пример 1. Найдем решение ТЗ, исходные данные которой приведены в табл.1 с учетом того, что из пункта A_1 в пункт B_1 перевозки не могут быть осуществлены, а из пункта A_3 в пункт B_1 будет завезено 10 ед. груза.

Таблица 1

B_j / A_i	50	80	30	60
65	3	5	4	1
85	4	5	6	2
70	5	1	3	3

■ Так как из A_1 в B_1 перевозки не могут быть осуществлены, то в ячейке (1,1) тариф считаем равными некоторому сколь угодно большому числу M. Полагаем равным этому же числу и тариф для ячейки (3,1). Одновременно в эту клетку помещаем число 10, так как по условию из A_3 в B_1 нужно завезти 10 единиц груза. В дальнейшем ячейку (3,1) считаем свободной со сколь угодно большим тарифом M. Находим опорный план методом наименьшей стоимости и проверяем его на оптимальность.

Итерация 0

B_j / A_i	50	80	30	60	u_i
65	M 2-M	5 -2	⊕4 5	⊖1 60	0
85	4 40	5 20	⊖6 25	⊕2 1	2
70	M 10 -M	1 60	3 -1	3 -4	-2
v_j	2	3	4	1	

Итерация 1

B_j / A_i	50	80	30	60	u_i
65	M 3-M	5 -1	4 30	1 35	0
85	4 40	5 20	6 -1	2 25	1
70	M 10 -M	1 60	3 -4	3 -5	-3
v_j	3	4	4	1	

Он не оптимален, так как одна оценка является положительной (1). Строим новый план (итерация 1). Он является оптимальным. Следовательно, исходная ТЗ имеет оптимальный план

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 35 \\ 40 & 20 & 0 & 25 \\ 10 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом общая стоимость перевозок $z^*=4\times30+1\times35+4\times40+5\times20+2\times25+5\times10+1\times60=575$ ден. ед. является минимальной. ●

Таблица 1

B_j / A_i	50	80	30	60
65	3	5	5	1
85	4	5	6	2
70	5	1	3	3

Пример 2. Найдем решение ТЗ, исходные данные которой приведены в табл.2 с учетом того, что из пункта A_2 в пункт B_4 завезти не менее 5 ед. груза, а из A_2 в B_1 – не более 30 ед. груза.

■ Так как из A_2 в B_4 необходимо завезти не менее 5 ед.груза, то запасы этих пунктов отправления и назначения считаем меньшими на 5 ед. Кроме того, поскольку из A_2 в B_1 необходимо завезти не более 30 ед. груза, то пункт назначения B_1 разобьём на два пункта: потребности B_1 теперь считаем равными 30 ед. и рассмотрим дополнительный пункт B''_1 с потребностями, равными 50-30=20 ед. В столбце B''_1 записываем тарифы, помещённые в ячейках столбца B_1, за исключением ячейки (2,1″). В этой ячейке тариф полагаем равным некоторому сколь угодно большому числу M. Решение задачи методом потенциалов приведено в таблицах итер. 0–2.

Итерация 0

B_j / A_i	30	80	30	55	20	u_i
65	3 10 ⊖	5 -1	5 0	1 55	⊕3 M-4	0
80	⊕ 4 20	5 10	6 30	2 0	M 20 ⊖	1
70	5 -5	1 70	3 -1	3 -5	5 M-9	-3
v_j	3	4	5	1	M-1	

*Итерация*1

B_j / A_i	30	80	30	55	20	u_i
65	3 4-M	5 3-M	5 4-M	⊖ 1 55	⊕ 3 10	0
80	4 30	5 10	6 30	⊕ 2 M-4	⊖ M 10	M-3
70	5 -5	1 70	3 -1	3 M-9	5 M-9	M-7
v_j	7-M	8-M	9-M	1	3	

Итерация 2

B_j / A_i	30	80	30	55	20	u_i
65	3 0	5 -1	5 0	1 45	3 20	0
80	4 30	5 10	6 30	2 10	M 4-M	1
70	5 -5	1 70	3 -1	3 -1	5 -5	-3
v_j	3	4	5	1	3	

Как видно из таблицы итер. 3, исходная ТЗ имеет оптимальный план

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 45 \\ 30 & 10 & 30 & 15 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы сложили соответствующие переменные столбцов B_1 и B''_1 и добавили 5 ед. груза в ячейку (2,4) исходя из дополнительных условий задачи. При этом общая стоимость перевозок

$$z^*=3\times20+1\times45+4\times30+5\times10+6\times30+2\times15+1\times70=555 \text{ ден. ед.}$$

является минимальной. ●

Замечание. Описанная выше методика решения ТЗ применима и к некоторым другим задачам с усложнённой постановкой. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. В случае нехватки груза может возникнуть требование полного или конкретно указанного частичного обеспечения отдельных пунктов назначения. Например, пусть требуется найти решение ТЗ, исходные данные которой приведены в табл., причём потребности B_2 и B_4 должны быть полностью удовлетворены.

■ Задача открытая, так как $\sum_{i=1}^{3} a_i = 38, \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 50$. Вводим фиктивного поставщика, его мощность a_4=12. Так как потребности B_2 и B_4 должны быть полностью удовлетворены, то следует назначить очень высокую стоимость M перевозки в B_2 и B_4 от фиктивного поставщика.

b_j / a_i	10	15	15	10
12	9	14	12	10
19	8	6	10	8
7	7	8	7	10

Решение имеет вид:

				Итерация 0	
B_j / A_i	10	15	15	10	u_i
12	⊕ 9 3	14 -6	⊖12 6	10 6	0
19	8 2	6 15	10 0	8 4	-2
7	7 0	8 -5	7 7	10 -5	-5
12	0 10 ⊖	M -4-M	0 2 ⊕	M -2-M	-12
v_j	5	3	1	4	

				Итерация1	
B_j / A_i	10	15	15	10	u_i
12	9 6	14 -6	12 -3	10 6	0
19	8 -1	6 15	10 -3	8 4	-2
7	7 0	8 -2	7 7	10 -2	-2
12	0 4	M -1-M	0 8	M 1-M	-9
v_j	9	8	9	10	

В оптимальном плане фиктивную строку не записывают:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 15 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок при этом составила z^*=265 ден. ед. Оптимальная стоимость перевозок выше, чем в таком же примере без дополнительных условий, но она минимальна при выполнении дополнительных условий. Недополучат груз потребители B_1 и B_3 в количествах 4 и 8 ед. соответственно. ●

Аналогично решается задача в случае, если может возникнуть требование полного или конкретно указанного частичного вывоза груза из отдельных пунктов отправления. Например, пусть в задаче требуется вывезти груз от поставщика A_1 полностью. Это означает, что следует назначить очень высокую стоимость M перевозки от поставщика A_1 в фиктивный пункт назначения.

Усложнения типа полного ввоза-вывоза возможны лишь для открытых ТЗ.

5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО КРИТЕРИЮ ВРЕМЕНИ

Как известно, качество плана транспортной задачи можно оценивать по различным критериям. Рассмотрим здесь в качестве такого критерия (целевой функции) время перевозок.

Транспортная задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов. Как и в обычной ТЗ, имеется m поставщиков с запасами однородного груза в количестве a_i ($i=1\div m$) и n потребителей, которым этот груз должен быть доставлен в объеме b_j ($j=1\div n$). Требуется составить план перевозок товара так, чтобы удовлетворить потребности при имеющихся запасах и чтобы при этом наибольшее время доставки всех грузов было минимальным.

Пусть $\mathbf{T}$ – матрица времен размера $m\times n$, в которой на позиции (i,j) находится величина t_{ij}. Тогда задача имеет вид:

$$z=\max_{x_{ik}>0} t_{ik} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ \mathbf{X} \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

ТЗ по критерию времени не является задачей линейного программирования, т.к. целевая функция z не является линейной функцией переменных x_{ij}.

Без ограничения общности можно считать, что задача закрытая. В противном случае ее всегда можно закрыть, пропорционально уменьшая избыточные запасы a_i (или потребности b_j) или вводя фиктивные пункты отправления или назначения.

Решение ТЗ по критерию времени может быть получено в следующем порядке. Находится начальный план $\mathbf{X}_0$ (можно использовать, например, метод северо-западного угла или метод наименьшей стоимости). Определяется значение целевой функции $z(\mathbf{X}_0)=\max_{x_{ik}>0} t_{ik} = t_{i_0 k_0}$.

Все свободные ячейки, которым соответствуют $t_{ik}>t_{i_0 k_0}$, исключаются из рассмотрения (например, закрашиваются темным фоном). Чтобы понизить значение целевой функции, необходимо освободить ячейку (i_0,k_0), в которой t_{ik} достигает максимума. Для этого можно строить так называемые **разгрузочные циклы**, которые могут включать в свой состав несколько свободных ячеек, т.е. положительные вершины цикла могут опираться на ячейки с нулевыми перевозками. В разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой ячейки (i_0,k_0), расставляются поочередно знаки «-» и «+» и осуществляют сдвиг на величину $\theta = \min_{"-"} t_{ik}$. Если удается эту ячейку разгрузить, то она исключаются из рассмотрения (закрашивается). Получается новый план $\mathbf{X}_1$, на котором значение целевой функции не больше, чем на $\mathbf{X}_0$. Далее снова пытаются разгрузить ячейку, соответствующую $z(\mathbf{X}_1) = \max\limits_{x_{ik}>0} t_{ik} = t_{i_1k_1}$.

Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую ячейку не исчезнет.

Рассмотрим этот метод на примере.

Пример. Пусть $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \\ 15 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, a_1=20, a_2=30, a_3=50, a_4=50, b_1=20, b_2=30, b_3=40, b_4=60.

■ Находим начальный план $\mathbf{X}_0$ методом северо-западного угла (итерация 0, рис.1). Базисные нули не записываем. Максимум целевой функции $z(\mathbf{X}_0) = \max\limits_{x_{ik}>0} \{10,8,5,12,4\}$=12 достигается в ячейке (3,4). Закрасим ячейку (4,1), т.к. время t_{41}=15 больше, чем $z(\mathbf{X}_0)$=12.

Итерация 0

B_j / A_i	20	30	40	60
20	10 20	6	3	2
30	5	Θ 8 30	7	⊕ 4
50	2	⊕ 4	5 40	Θ 12 10
50	15	5	9	4 50

Рис.1

Для улучшения решения разгрузим ее с помощью цикла (3,4)→(2,4)→(2,2)→(3,2) (рис.1). Осуществив сдвиг по циклу, получим новое опорное решение $\mathbf{X}_1$ (итерация 1 на рис.2). Максимум целевой функции на этом опорном решении $z(\mathbf{X}_1) = \max\limits_{x_{ik}>0} \{10,8,4,4,5,4\}$=10 достигается в ячейке (1,1). Закрасим ячейку (3,4), т.к. время t_{34}=12 больше, чем $z(\mathbf{X}_1)$=10. Разгрузим ячейку (1,1) с помощью цикла (1,1)→(1,2)→(2,2)→(2,1) (итерация 1 на рис. 2). Осуществив сдвиг по циклу, получим новое опорное решение $\mathbf{X}_2$ (итерация 2 на рис.2). Максимум целевой функции на этом опорном решении $z(\mathbf{X}_2) = \max\limits_{x_{ik}>0} \{6,5,4,4,5,4\}$=6 достигается в ячейке (1,2). Закрасим ячейки (1,1), (2,2), (2,3) и (4,3), т.к. в них время

Итерация 1				
B_j / A_i	20	30	40	60
20	Θ 10 20	⊕ 6	3	2
30	⊕ 5	Θ 8 20	7	4 10
50	2	4 10	5 40	12
50	15	5	9	4 50

Итерация 2				
B_j / A_i	20	30	40	60
20	10	Θ 6 20	⊕ 3	2
30	5 20	8	7	4 10
50	2	⊕ 4 10	Θ 5 40	12
50	15	5	9	4 50

Итерация 3				
B_j / A_i	20	30	40	60
20	10	6	3 20	2
30	5 20	8	7	4 10
50	2	4 30	5 20	12
50	15	5	9	4 50

Рис.2

t_{11}=10, t_{22}=8, t_{23}=7 и t_{43}=9 больше, чем $z(\mathbf{X}_2)$=6. Разгрузим ячейку (1,2) с помощью цикла (1,2)→(1,3)→(3,3)→(3,2) (итерация 2 на рис.2). Осуществив сдвиг по циклу, получим новое опорное решение $\mathbf{X}_3$ (итерация 3 на рис.2). Максимум целевой функции на этом опорном решении $z(\mathbf{X}_3)=\max\limits_{x_{ik}>0}\{3,5,4,4,5,4\}=5$ достигается в ячейках (2,1) и (3,3). Закрасим ячейки (1,2) и (4,2), в которых время перевозок не менее t_{21}=5. С помощью оставшихся не закрашенных ячеек разгрузить ячейки (2,1) и (3,3) не удается, поэтому $\mathbf{X}_3$ является оптимальным решением:

$$\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix},\ z^*=z(\mathbf{X}_3)=5. \qquad \bullet$$

6. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Пусть некоторая комплексная работа P связана с производством совокупности n более мелких работ P_1, P_2, …, P_n, которые могут выполняться независимо одна от другой. В распоряжении планирующего органа находится m организаций-исполнителей (или рабочих) $И_1$, $И_2$, …, $И_m$, каждая из которых может выполнять только некоторые определенные работы. При этом каждый исполнитель одновременно может выполнять только какую-нибудь работу и каждая работа одновременно может выполняться только одним исполнителем. Задача состоит в распределении работ между исполнителями таким образом, чтобы одновременно выполнялось возможно большее их количество.

Эту задачу можно рассматривать как частный случай транспортной задачи. Здесь рабочие представляют «исходные пункты», а рабочие места − «пункты назначения». Предложение в каждом исходном пункте равно 1, т. е. a_i=1 для всех i. Аналогично спрос в каждом пункте назначения равен 1, т.е. b_j=1 для всех j. Стоимость «перевозки» (прикрепления) рабочего i к рабочему месту j равна c_{ij}. В табл. 1 иллюстрируется общая структура задачи о назначениях.

Таблица 1

		Рабочие места				
		1	2	…	n	Предложение
Рабочие	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	1
	…	…	…	…	…	…
	m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	1
	Спрос	1	1	…	1	

Прежде чем решать задачу методами, ассоциированными с транспортной моделью, необходимо ликвидировать дисбаланс (т.е. закрыть задачу), добавив фиктивные ресурсы (если $m<n$) или объекты (если $m>n$). Поэтому без потери общности можно положить $m=n$.

Задачу о назначениях можно представить следующим образом. Пусть

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i-\text{й ресурс назначается на } j-\text{й объект},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Теперь задача будет формулироваться следующим образом:

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1\div n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1\div n,$$

$$x_{ij}=0 \text{ или } 1.$$

Специфическая структура задачи о назначениях позволяет разработать эффективный метод ее решения. Покажем, как реализуется один из таких методов (т.н. **венгерский метод**) на примере приведенной выше задачи.

Теорема 1. Оптимальное решение задачи о назначениях не изменится, если к любой строке или столбцу матрицы стоимостей прибавить (или вычесть) постоянную величину.

■ Этот факт можно доказать следующим образом. Если числа p_i и q_j вычитаются из i-й строки и j-го столбца, то новые стоимости имеют вид $c'_{ij}=c_{ij}-p_i-q_j$. Отсюда получается новая целевая функция

$$z'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-p_i-q_j)x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}q_j\sum_{i=1}^{n}x_{ij}.$$

Поскольку $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1$, то $z'=z$-const. Отсюда следует, что минимизация исходной целевой функции z приводит к такому же решению, как минимизация z'. ●

Приведенное соображение показывает, что если можно построить новую $\{c'_{ij}\}$-матрицу с нулевыми элементами и эти нулевые элементы или их подмножество соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным, поскольку стоимость не может быть отрицательной.

Алгоритм венгерского метода включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. (**Получение нулей в каждой строке.**) Для этого в каждой строке определяют наименьший элемент, и его значение вычитают от всех элементов данной строки. Переход к шагу 2.

Шаг 2. (**Получение нулей в каждом столбце.**) В преобразованной таблице стоимостей в каждом столбце определяют наименьший элемент, и его значение вычитают от всех элементов данного столбца. Переход к шагу 2.

Шаг 3. (**Поиск оптимального решения**.) Просматривают строку, содержащую наименьшее число нулей. Отмечают один из нулей этой строки и зачеркивают все остальные нули этой строки и этого столбца, в которых находится отмеченный нуль. Аналогичные операции последовательно проводят для всех строк. Каждому отмеченному нулю соответствует назначение, т.е. переменная x_{ij} принимает значение, равное 1. Если назначение, которое получено при всех отмеченных нулях, является полным (т.е. число отмеченных нулей равно размерности задачи n), то решение является оптимальным. В противном случае следует переход к шагу 4.

Шаг 4. (**Вычеркивание всех нулей таблицы.**) Проводим минимальное число прямых через некоторые строки и столбцы с тем, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. Выбирается **наименьший** не вычеркнутый элемент. Этот элемент вычитается из каждого не вычеркнутого элемента и прибавляется к каждому элементу, стоящему на пересечении проведенных прямых. Далее возвращаемся к шагу 3.

Пример 1. Институт получил гранты на выполнение четырех научно-исследовательских проектов. Выходные результаты первого проекта являются входными данными для второго проекта, выходные результаты второго проекта − это входные данные для третьего проекта, результаты третьего проекта используются для работы над четвертым проектом (т.е. проекты нельзя выполнять параллельно). В качестве научных руководителей проектов рассматриваются кандидатуры четырех ученых, обладающих различным опытом и способностями. Каждый ученый оценил время, необходимое для реализации каждого проекта. Матрица времени имеет вид:

$$\mathbf{T}=\begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 7 & 5 & 8\\ 2 & 4 & 4 & 5\\ 4 & 7 & 2 & 8\\ 9 & 7 & 3 & 8\\ \hline\end{array}\ .$$

На пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы **T** стоит время, необходимое i-м ученым j-го проекта (в месяцах). Требуется выбрать научных руководителей проектов так, чтобы суммарное время выполнения всех проектов было минимальным.

■ Пусть $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i-\text{й ученый - руководите ль } j-\text{го проекта},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$ Тогда целевая функция имеет вид:

$$z=\sum_{i,j} t_{ij}x_{ij}\rightarrow\min,\ t_{ij} - \text{элементы матрицы } T.$$

Решаем задачу венгерским методом. Кратко решение задачи можно записать следующим образом:

$$\mathbf{T}=\begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 7 & 5 & 8\\ 2 & 4 & 4 & 5\\ 4 & 7 & 2 & 8\\ 9 & 7 & 3 & 8\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 4 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 0 & 6\\ 6 & 4 & 0 & 5\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 3\\ 6 & 2 & 0 & 2\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|cccc|}\hline 0\cdot & 2 & 2 & 2\\ \cancel{0} & 0\cdot & 2 & \cancel{0}\\ 2 & 3 & 0\cdot & 3\\ 6 & 2 & \cancel{0} & 2\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 3\\ 6 & 2 & 0 & 2\\ \hline\end{array}\ \sqcup$$

$$\sqcup\ \begin{array}{|cccc|}\hline 0\cdot & 2 & 4 & 2\\ \cancel{0} & 0\cdot & 4 & \cancel{0}\\ \cancel{0} & 1 & 0\cdot & 1\\ 4 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0\cdot\\ \hline\end{array}$$

Табл. 2−5 соответствуют шагам 1−4 венгерского метода, табл. 6 − возвращение к шагу 3, на котором получено второе в этой задаче назначение. Оно является полным, т.к. число отмеченных нулей равно размерности задачи n=4. Имеем следующее назначение: 1-й ученый назначен научным руководителем 1-го проекта, 2-й − 2-го проекта, 3-й − 3-го и 4-й − 4-го. Получен ответ:

$$\mathbf{X}^*=\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline\end{array}\ ,\quad z^*=3+4+2+8=17 \text{ (месяцев)}.$$

Заметим, что если бы мы отмечали нули несколько в ином порядке, то плучили бы другую матрицу назначений с той же стоимостью (альтернативное решение), например:

$$\mathbf{X}_1^*=\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\ ,\ z^*=3+5+2+7=17 \text{ (месяцев)}.\qquad \bullet$$

Пример 2. Имеется четверо рабочих и пять видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим приведена в таблице стоимостей **C**, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом − работа.

$$\mathbf{C}=\begin{array}{|ccccc|}\hline 4 & 5 & 3 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 10 & 9 & 8\\ 2 & 9 & 3 & 10 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 9 & 10\\ \hline\end{array}\ .$$

■ Данная задача является открытой, т.к. число рабочих m=4 меньше числа работ n=5. Закрываем ее, вводя фиктивного рабочего (т.е. пятую строку таблицы) с нулевыми стоимостями. В этом случае шаг 2 (получение нулей в каждом столбце) становится лишним. Решение имеет вид:

$$\mathbf{C}=\begin{array}{|ccccc|}\hline 4 & 5 & 3 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 10 & 9 & 8\\ 2 & 9 & 3 & 10 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 9 & 10\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 4 & 5 & 3 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 10 & 9 & 8\\ 2 & 9 & 3 & 10 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 9 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 5 & 4 & 3\\ 0 & 7 & 1 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 0\cdot & 2 & 3\\ 0\cdot & 1 & 5 & 4 & 3\\ \cancel{0} & 7 & 1 & 8 & 2\\ \cancel{0} & 1 & 2 & 7 & 8\\ \cancel{0}\cdot & 0\cdot & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ \hline\end{array}\ \sqcup$$

$$\sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 1 & 2 & 0\cdot & 2 & 3\\ 0\cdot & 1 & 5 & 4 & 3\\ \cancel{0} & 7 & 1 & 8 & 2\\ \cancel{0} & 1 & 2 & 7 & 8\\ \cancel{0}\cdot & 0\cdot & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 2 & 2 & 0\cdot & 2 & 3\\ 0 & 0\cdot & 4 & 3 & 2\\ 0\cdot & \cancel{6} & 0 & 7 & 1\\ \cancel{0} & 0 & 1 & 6 & 7\\ \cancel{1} & 0 & \cancel{0} & \cancel{0}\cdot & 0\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 2 & 2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}\ \sqcup\ \begin{array}{|ccccc|}\hline 2 & 2 & 0\cdot & 1 & 2\\ 0\cdot & \cancel{0} & 4 & 2 & 1\\ \cancel{0} & \cancel{6} & 0 & 6 & 0\cdot\\ \cancel{0} & 0\cdot & 1 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & \cancel{0}\cdot & 0\\ \hline\end{array}$$

Получено следующее назначение: 1-й рабочий выполняет 3-ю работу, 2-й − 1-ю, 3-й − 5-ю и 4-й − 2-ю. Фиктивный рабочий «выполняет» 4-ю работу, т.е. эта работа не получила назначения. Имеем ответ, в котором фиктивные строки (и столбцы, если бы они были) не указаны:

$$\mathbf{X}^*=\begin{array}{|ccccc|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline\end{array}\ ,\quad z^*=3+5+9+9=26\ (\text{руб}).$$

●

7. ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача математического программирования

$$z(\mathbf{X})\rightarrow\max\ (\text{или}\ \min) \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\mathbf{g}(\mathbf{X})\leq\mathbf{b}$$

или

$$\mathbf{g}(\mathbf{X})\geq\mathbf{b}$$

или

$$\mathbf{g}(\mathbf{X})=\mathbf{b}, \qquad (2)$$

в которой либо ограничения, либо целевая функция $z(\mathbf{X})$, либо и то и другое нелинейные, называется задачей **нелинейного программирования (НП).**

НП применяется при прогнозировании промышленного производства, управлении товарными ресурсами, планировании обслуживания и ремонта оборудования и т.д. Нелинейные задачи составляют широкий класс настолько сложных задач, что до сих пор невозможно разработать общие методы, подобные симплекс-методу в ЛП. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближённые методы решения, графический метод.

В теории выпуклого программирования в качестве основной обычно рассматривается задача минимизации выпуклой функции n переменных $z(\mathbf{X})$ при ограничениях $g_i(\mathbf{X})\leq 0$ ($i=1\div m$), $\mathbf{X}\geq\mathbf{0}$, где функции $g_i(\mathbf{X})$ предполагаются выпуклыми.

Если $z(\mathbf{X})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ являются вогнутыми функциями, то имеем задачу максимизации $z(\mathbf{X})$ при ограничениях $g_i(\mathbf{X})\geq 0$ ($i=1\div m$), $\mathbf{X}\geq\mathbf{0}$.

В данном разделе рассматриваются необходимые и достаточные условия существования экстремумов функций при отсутствии ограничений, метод **множителей Лагранжа** для решения задач с ограничениями-равенствами, **условия Куна-Таккера** для задач с ограничениями в виде неравенств и **графический метод**.

7.1. Классическая теория оптимизации (экстремальные задачи без ограничений). Классическая теория оптимизации основана на использовании дифференциального исчисления для нахождения точек максимумов и минимумов (экстремумов) функций в условиях отсутствия и наличия ограничений. Разработанные к настоящему времени методы оптимизации далеко не всегда оказываются эффективными при решении целого ряда экстремальных задач. Однако фундаментальные теоретические построения служат основой для разработки большинства алгоритмов решения задач НП.

Экстремальная точка функции $f(\mathbf{X})$ определяет либо максимум, либо минимум этой функции. Точка $\mathbf{X_0}=(x_1,....,x_j,...,x_n)$ является **точкой максимума**, если неравенство

$$f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})\leq f(\mathbf{X_0})$$

выполняется для всех $\mathbf{h}=(h_1,....,h_j,...,h_n)$, таких, что $|h_j|$ достаточно малы для всех j. Другими словами, точки $\mathbf{X_0}$ является точкой максимума, если значение функции f в окрестности точки $\mathbf{X_0}$ не превышает $f(\mathbf{X_0})$. Аналогично, $\mathbf{X_0}$ является **точкой минимума**, если для определенного выше вектора $\mathbf{h}$ справедливо неравенство

$$f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})\geq f(\mathbf{X_0}).$$

Максимумы и минимумы, определённые выше, являются **локальными,** или **относительными,** максимумами. **Глобальный** максимум (минимум) функции – это её наибольшее (наименьшее) значение из локальных максимумов (минимумов).

Вообще говоря, $\boldsymbol{X_0}$ является точкой **нестрогого максимума**, если

$f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})\le f(\mathbf{X_0})$, и точкой **строгого максимума**, если $f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})<f(\mathbf{X_0})$, где $\mathbf{h}$ – вектор, определение которого дано выше.

Сформулируем **необходимые и достаточные условия** существования экстремумов функции n переменных $f(\mathbf{X})$. При этом предполагается, что первая и вторая частные производные $f(\mathbf{X})$ непрерывны в каждой точке $\mathbf{X}$.

Теорема 1 (**необходимые условия**). Если точка $\mathbf{X_0}$ является экстремальной точкой функции $f(\mathbf{X})$, то $\nabla f(\mathbf{X_0})=0$, где $\nabla f(\mathbf{X_0})$ – вектор градиента,

$$\nabla f(\mathbf{X_0})=\left(\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}\right),\ j=1\div n.$$

■ Из теоремы Тейлора следует, что при $0<\theta<1$ справедливо разложение $f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})-f(\mathbf{X_0})=\nabla f(\mathbf{X_0})\mathbf{h}+(1/2)\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}}$, где $\mathbf{H}$ – матрица вторых производных (или матрица Гессе), $\mathbf{H}=\left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, $i,j=1\div n$.

Если $|h_j|$ достаточно малы, то остаточный член $(1/2)\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{h}$ оказывается бесконечно малой величиной порядка h_j^2, что позволяет переписать разложение в виде следующего приближенного равенства:

$$f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})-f(\mathbf{X_0})=\nabla f(\mathbf{X_0})\mathbf{h}+O(h_j^2)\approx\nabla f(\mathbf{X_0})\mathbf{h}.$$

Предположим, что $\mathbf{X_0}$ есть точка минимума. Докажем от противного равенство нулю $\nabla f(\mathbf{X_0})$. Пусть это условие не выполняется; тогда для некоторого j либо $\partial f(\mathbf{X_0})/\partial x_j<0$, либо $\partial f(\mathbf{X_0})/\partial x_j>0$. Всегда можно выбрать знак h_j таким образом, чтобы $h_j\partial f(\mathbf{X_0})/\partial x_j<0$. Если положить остальные h_j равными нулю, то из разложения Тейлора следует неравенство $f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})<f(\mathbf{X_0})$. Полученный результат находится в противоречии с предположением о том, что $\mathbf{X_0}$ – точка минимума. Следовательно, величина $\nabla f(\mathbf{X_0})$ равна нулю. Аналогичное доказательство можно провести для точки максимума. ●

Для функции одной переменной это условие записывается следующим образом: $f'(x_0+h)=0$.

Как было отмечено ранее, полученное условие удовлетворяется также в точках перегиба и седловых точках функции. Следовательно, оно является необходимым, но недостаточным для идентификации экстремальных точек. В связи с этим точки, удовлетворяющие уравнению $\nabla f(\mathbf{X_0})=0$, будем называть **стационарными.** Следующая теорема устанавливает **достаточные условия** для того, чтобы $\mathbf{X_0}$ была экстремальной точкой.

Теорема 2. Стационарная точка $\mathbf{X_0}$ является экстремальной, когда матрица Гессе $\mathbf{H}$ в точке $\mathbf{X_0}$ оказывается (1) положительно определенной (тогда $\mathbf{X_0}$ – точка минимума); (2) отрицательно определенной (тогда $\mathbf{X_0}$ – точка максимума).

■ Из теоремы Тейлора следует, что при $0<\theta<1$

$$f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})-f(\mathbf{X_0})=\nabla f(\mathbf{X_0})\mathbf{h}+(1/2)\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}},$$

Так как $\mathbf{X_0}$ – стационарная точка, то, согласно теор. 1**,** $\nabla f(\mathbf{X_0})=0$. Таким образом, $f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})-f(\mathbf{X_0})=(1/2)\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}}$. Пусть $\mathbf{X_0}$ – точка минимума; тогда по определению $f(\mathbf{X_0}+\mathbf{h})>f(\mathbf{X_0})$ для всех ненулевых $\boldsymbol{h}$. Это означает, что для точки минимума $\mathbf{X_0}$**,** выполняется неравенство $(1/2)\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}}>0$**.** Непрерывность второй частной производной гарантирует, что величина $(1/2)\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}$ имеет один и тот же знак в точках $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}$. Поскольку $\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X_0}}$ определяет некоторую квадратичную форму, то рассматриваемая величина (и, следовательно, $\mathbf{h}^T\mathbf{H}\mathbf{h}|_{\mathbf{X_0}+\theta\mathbf{h}}$) положительна тогда и только тогда, когда $\mathbf{H}|_{\mathbf{X_0}}$ – положительно определенная матрица. Это означает, что достаточным условием существования минимума в стационарной точке $\mathbf{X}_0$ является положительная определенность матрицы Гессе в этой точке. С помощью аналогичных рассуждений нетрудно также доказать второе утверждение теоремы, т. е. показать, что достаточным условием существования максимума в стационарной точке является отрицательная определенность матрицы Гессе в этой точке. ●

Как известно, матрица **А** будет **положительно определенной** (**полуопределенной**), если значения всех угловых миноров определителя |**А**| положительны (неотрицательны).

Матрица **А** будет **отрицательно определенной**, если значения k-х угловых миноров определителя |**А**| отличны от нуля и имеют знак $(-1)^k$, $k=1\div n$.

Матрица **А** будет **отрицательно полуопределенной**, если значения k-х угловых миноров определителя |**А**| равны нулю либо имеют знак $(-1)^k$, $k=1\div n$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

■ Из необходимого условия $\nabla f(\mathbf{X_0})=0$ следует, что $\partial f/\partial x_1=1-2x_1=0$, $\partial f/\partial x_2=x_3-2x_2=0$, $\partial f\partial x_3=2+x_2-2x_3=0$. Решением этой системы является вектор $\mathbf{X_0}=(1/2, 2/3, 4/3)$. Чтобы проверить выполнение достаточного условия, вычислим

$$\mathbf{H}|_{\mathbf{X_0}}=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}|_{\mathbf{X_0}}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры $\mathbf{H}|_{\mathbf{X_0}}$ равны -2, 4 и -6 соответственно. В этом случае

$\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ является отрицательно определенной матрицей, откуда следует, что $\mathbf{X}_0$=(1/2,2/3, 4/3) – точка максимума. ●

В общем случае, когда матрица $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ является неопределенной, точка $\mathbf{X}_0$ должна быть седловой. Если же матрица $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ является полуопределенной, то соответствующая точка $\mathbf{X}_0$ может как быть, так и не быть экстремальной. При этом формулировка достаточного условия существования экстремума значительно усложняется, ибо для этого необходимо учитывать члены более высоких порядков в разложении Тейлора.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)=8x_1x_2+3x_2^2$.

■ Необходимые условия экстремума для неё принимают вид $\nabla f(x_1, x_2)=(8x_2; 8x_1+6x_2)=(0;0)$, т.е. $\mathbf{X_0}$=(0, 0) – стационарная точка. При этом матрица Гессе

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

не несет информации о наличии или отсутствии экстремума. ●

Достаточные условия, установленные теор. 6, весьма просто формулируются для функций одной переменной. Пусть y_0 – стационарная точка, тогда

(1) $f^*(y_0)<0$ – достаточное условие существования максимума в точке y_0;

(2) $f^*(y_0)>0$ – достаточное условие существования минимума в точке y_0.

Если в случае одной переменной значение $f''(y_0)$ равно нулю, то необходимо исследовать производные высших порядков.

Теорема 3. Если в стационарной точке y_0 первые (n-1) производных функции $f(y)$ обращаются в нуль, а $f^{(n)}(y_0)$, то при $y=y_0$ функция $f(y)$ имеет

(1) точку перегиба, если n – нечетное;

(2) экстремальную точку, если n – четное. Экстремальной точке соответствует максимум при $f^{(n)}(y_0)<0$ и минимум при $f^{(n)}(y_0)>0$.

Пример 3. Рассмотрим две функции $f(y)=y^4$ и $g(y)=y^3$.

■ Для $f(y)=y^4$ имеем $f'(y)=4y^3=0$, откуда $y_0=0$ – стационарная точка. Далее $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$. Т.к. $f^{(4)}(0)=24>0$, то $y_0=0$ – точка минимума.

Для $g(y)=y^3$ имеем $g'(y)=3y^2=0$. Таким образом, $y_0=0$ – стационарная точка. Поскольку $g^{(n)}(0)$ не обращается в нуль при $n=3$, то $y_0=0$ – точка перегиба. ●

Использование необходимого условия $\nabla f(\mathbf{X})=0$ для нахождения стационарных точек связано с определенными трудностями, которые возникают в процессе численного решения соответствующей системы уравнений. Рассмотрим здесь **метод Ньютона-Рафсона** – итерационную процедура решения систем нелинейных уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$f_i(\boldsymbol{X})=0,\ i=1\div m.$$

Пусть $\mathbf{X}^k$ – заданная точка. Из разложения Тейлора следует, что

$$f_i(\boldsymbol{X})\approx f_i(\boldsymbol{X}^k)+\nabla f_i(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X}-\mathbf{X}^k),\ i=1\div m.$$

Таким образом, исходную систему уравнений можно приближенно представить в следующем виде:

$$f_i(\boldsymbol{X}^k)+\nabla f_i(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X}-\mathbf{X}^k)=0,\ i=1\div m.$$

Запишем полученную систему в матричной форме:

$$\mathbf{A}_k+\mathbf{B}_k(\mathbf{X}-\mathbf{X}^k)=0.$$

Предположим, что все векторы $f_i(\boldsymbol{X})$ независимы; тогда матрица $\mathbf{B}_k$ – невырожденная матрица. Из предыдущего уравнения получаем

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}^k-\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A}_k.$$

Идея рассматриваемого метода заключается в следующем. На первом шаге задается начальная точка $\mathbf{X}^0$. Если $\mathbf{X}^k$ известна, то с помощью полученного уравнения можно вычислить координаты новой точки $\mathbf{X}^{k+1}$. Процесс вычислений завершается в точке $\mathbf{X}^m$, когда $\mathbf{X}^m\approx\mathbf{X}^{m+1}$; при этом $\mathbf{X}^m$ – приближенное решение исходной системы.

К числу недостатков изложенного метода относится то обстоятельство, что сходимость метода в существенной степени зависит от выбора начальной точки. По-видимому, наиболее целесообразно определять начальную точку путем проб и ошибок.

7.2. Метод множителей Лагранжа. Метод множителей Лагранжа позволяет определять стационарные точки при решении оптимизационных задач с ограничениями в виде **равенств.** К сожалению, при практическом применении метода могут встретиться значительные вычислительные трудности, сужающие область его использования. Мы рассматриваем здесь метод Лагранжа потому, что он является аппаратом, активно используемым для обоснования различных численных методов, широко применяемых на практике. Что же касается функции Лагранжа и метода Лагранжа, то они играют самостоятельную и исключительно важную роль в теории и приложениях не только математического программирования. Схему этого метода можно формально представить следующим образом. Пусть

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{X})-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}(\mathbf{X}).$$

Функция L есть функция Лагранжа, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)$ – множители Лагранжа. Уравнения

$$\partial L/\partial\mathbf{X}=0 \text{ и } \partial L/\partial\boldsymbol{\lambda}=0 \qquad (3)$$

выражают рассмотренные выше **необходимые условия** наличия экстремума, которые порождаются функцией Лагранжа непосредственно. Это означает, что задача оптимизации с целевой функцией $f(\mathbf{X})$

при наличии ограничения $\mathbf{g}(\mathbf{X})=0$ эквивалентна задаче нахождения безусловного экстремума функции Лагранжа $L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})$.

Достаточные условия при использовании метода множителей Лагранжа имеют следующий вид. Определим матрицу

$$\mathbf{H}^B=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{P}\\ \mathbf{P}^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q}\end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)},$$

где

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\nabla g_1(\mathbf{X})\\ \ldots\\ \nabla g_m(\mathbf{X})\end{pmatrix}_{m\times n} \text{ и } \mathbf{Q}=\left(\frac{\partial^2 L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Матрица $\mathbf{H}^B$ представляет собой так называемую **окаймленную матрицу Гессе.**

Пусть дана стационарная точка $(\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ функции Лагранжа $L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})$, а окаймленная матрица Гессе $\mathbf{H}^B$ сформирована из значений соответствующих элементов в точке $(\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$. Тогда $\mathbf{X}_0$ является

1) точкой **максимума**, если, начиная с углового минора порядка $(2m+1)$, последующие $(n-m)$ угловых миноров матрицы $\mathbf{H}^B$ образуют знакопеременный числовой ряд, знак первого члена которого определяется множителем
$(-1)^{m+1}$;

2) точкой минимума, если, начиная с углового минора порядка . $(2m+1)$, знак последующих $(n-m)$ угловых миноров матрицы $\mathbf{H}^B$ определяется множителем $(-1)^m$.

Сформулированные условия оказываются достаточными для идентификации экстремальной точки, но не являются необходимыми. Иными словами, стационарная точка, не удовлетворяющая этим условиям, может быть экстремальной.

Существуют другие условия для идентификации экстремальных точек, которые являются как необходимыми, так и достаточными. Однако практическое использование этих условий в ряде случаев связано со значительными вычислительными трудностями.

Один из методов, которые иногда применяются для решения систем уравнений, выражающих необходимые условия наличия экстремума, заключается в последовательном выборе числовых значений $\boldsymbol{\lambda}$, после чего данная система решается относительно $\mathbf{X}$. Процедура повторяется до тех пор, пока вектор $\mathbf{X}$, соответствующий некоторому набору значений множителей $\boldsymbol{\lambda}$, не будет удовлетворять всем ограничениям-равенствам. Однако при увеличении количества ограничений объем необходимых вычислений существенно возрастает. В таких случаях следует обратиться к другим численным методам решения систем уравнений, например, к методу Ньютона-Рафсона.

Пример 4. Рассмотрим следующую задачу:

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min$$

при ограничении

$$4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0.$$

■ При этом функция Лагранжа

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14).$$

Необходимые условия наличия экстремума имеют вид и системы

$$\partial L/\partial x_1 = 2x_1 - 4\lambda = 0,\ \partial L/\partial x_2 = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0,\ \partial L/\partial x_3 = 2x_3 - 2\lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial \lambda = -(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14) = 0,$$

решениями которой являются векторы

$$(\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_1 = (2;2;1;1),\ (\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_2 = (2;-2;1;1),\ (\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_3 = (2{,}8;0;1{,}4;1{,}4).$$

Чтобы использовать достаточные условия, вычислим элементы матрицы

$$\mathbf{H}^B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2x_2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2-2\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Поскольку $m=1$ и $n=3$, то стационарная точка является точкой минимума, если знак последних (3-1)=2 главных миноров определяется множителем $(-1)^m=-1$. Таким образом, в точке $(\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_1=(2;2;1;1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32<0 \text{ и } \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64<0.$$

В точке $(\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_2=(2;-2;1;1)$ $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -32<0$ и $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -64<0.$

Наконец, в точке $(\mathbf{X}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)_3=(2{,}8;0;1{,}4;1{,}4)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 \end{vmatrix} = 12{,}8>0 \text{ и } \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32>0.$$

Отсюда следует, что $(\mathbf{X}_0)_1$ и $(\mathbf{X}_0)_2$ – точки минимума. Тот факт, что $(\mathbf{X}_0)_3$ не удовлетворяет достаточным условиям наличия максимума или минимума, не означает, что данная точка не является экстремальной. В таком случае следует обратиться к достаточным условиям в другой формулировке. ●

Рассмотрим **экономический смысл** множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим классическую задачу оптимизации

$$z=f(x_1,x_2)\to\max\ (\min) \qquad (4)$$

при ограничении

$$g(x_1,x_2)=b. \qquad (5)$$

Предположим, что условный экстремум достигается в точке $\mathbf{X}^*=(x_1^*,x_2^*)$. Соответствующее экстремальное значение функции z $z^*=f(x_1^*,x_2^*)$. Допустим, что в ограничениях (5) величина b может меняться. Тогда координаты x_1^* и x_2^* точки экстремума, а следовательно, и экстремальное значение z^* функции $z=f$ станут величинами, зависящими от b, т.е. $x_1^*=x_1^*(b)$, $x_2^*=x_2^*(b)$, $z^*=f(x_1^*(b),x_2^*(b))$. Поэтому производная функции (4)

$$\frac{dz^*}{db}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1^*}{db}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2^*}{db}. \qquad (6)$$

С другой стороны, в силу равенства (5) $g(x_1^*,x_2^*)=b$, откуда после дифференцирования имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1^*}{db}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2^*}{db}=1. \qquad (7)$$

Кроме того, в точке экстремума $\mathbf{X}^*$ выполняются необходимые условия (3). Из этих равенств для $n=2$ и $m=1$ получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}. \qquad (8)$$

Подставляя выражения (7) в равенство (6) и учитывая соотношение (8), находим $\frac{dz^*}{db}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1^*}{db}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2^*}{db}=\lambda\cdot 1=\lambda$. Для задачи (4), (5) аналогично получаем $\frac{dz^*}{d\mathbf{b}}=\boldsymbol{\lambda}$.

Если z интерпретировать как доход, а b_i – как объёмы некоторого ресурса, то множители Лагранжа λ_i показывают, как изменится максимальный доход, если количество ресурса i-го вида увеличится на единицу.

7.3. Ограничения в виде неравенств. Условия Куна-Таккера. Обобщим метод множителей Лагранжа на случай задачи с ограничениями в виде неравенств. Рассмотрим вначале **необходимые** условия Куна-Таккера, которые позволяют определять стационарные точки в задаче НП с ограничениями в виде неравенств. Эти условия являются также и достаточными, если выполняются определённые правила, приведённые ниже.

Рассмотрим следующую задачу:

$$z=f(\mathbf{X})\to\max$$

при ограничениях

$$\mathbf{g}(\mathbf{X})\le 0.$$

Ограничения-неравенства можно преобразовать в равенства с помощью **неотрицательных** дополнительных (балансовых) переменных. Пусть S_i^2 (≥ 0) – дополнительная (балансовая) переменная, которая прибавляется к левой части i-го ограничения $g_i(\mathbf{X})\leq 0$ и пусть

$$\mathbf{S}=(S_1, S_2, ..., S_m)^T \text{ и } \mathbf{S}^2=(S_1^2, S_2^2, ..., S_m^2)^T,$$

где m – общее количество ограничений-неравенств. Следовательно, функция Лагранжа записывается в виде

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{X})-\boldsymbol{\lambda}[\mathbf{g}(\mathbf{X})+\mathbf{S}^2].$$

При ограничениях $\mathbf{g}(\mathbf{X})\leq 0$ необходимым условием оптимальности в задаче максимизации (минимизации) является неотрицательность (соответственно неположительность) множителей $\boldsymbol{\lambda}$. Действительно, рассмотрим задачу максимизации. Т.к. множители $\boldsymbol{\lambda}$ выражают скорость изменения целевой функции $z=f(\mathbf{X})$ по отношению к изменению $\mathbf{g}$, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}},$$

то как только правая часть ограничения $\mathbf{g}(\mathbf{X})\leq 0$ увеличивается и становится больше нуля, область допустимых решений задачи расширяется и, следовательно, оптимальное значение целевой функции не может уменьшиться. Это значит, что $\boldsymbol{\lambda}\geq 0$. Аналогично в случае задаче минимизации при увеличении правой части ограничения оптимальное значение целевой функции не может увеличиться, откуда следует, что $\boldsymbol{\lambda}\leq 0$. Если же ограничения задачи имеют вид равенств, т. е. $\mathbf{g}(\mathbf{X})=0$, то компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}$ по знаку не ограничены.

Указанные выше ограничения на вектор $\boldsymbol{\lambda}$ должны рассматриваться как часть необходимых условий Куна-Таккера. Теперь получим остальные условия.

Вычисляя частные производные функции L по $\mathbf{X}$, $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ и приравнивая их к нулю, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}}=\nabla f(\mathbf{X})-\boldsymbol{\lambda}\nabla,\ \frac{\partial L}{\partial S_i}=-2\lambda_i S_i=0,\ i=1\div m;\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=-(\mathbf{g}(\mathbf{X})+\mathbf{S}^2)=0.$$

Из второй группы уравнений следуют такие результаты.

1. Если $\lambda_i\neq 0$, то $S_i^2=0$. Это означает, что соответствующий этому ограничению ресурс является дефицитным и, следовательно, полностью исчерпан (ограничение имеет вид равенства).
2. Если $S_i^2>0$, то $\lambda_i=0$. Это значит, что i-й ресурс дефицитным не является и, следовательно, не влияет на значение целевой функции $z=f(\mathbf{X})$ (т.е. $\lambda_i=\frac{\partial f}{\partial g_i}=0$).

Из второй и третьей групп уравнений следует, что

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X})=0,\ i=1\div m.$$

Полученные условия подтверждают предыдущий результат, ибо если $\lambda_i>0$, то $g_i(\mathbf{X})=0$ или $S_i^2=0$. Аналогично при $g_i(\mathbf{X})<0$ $S_i^2>0$ и, следовательно, $\lambda_i=0$.

Теперь для задачи **максимизации** можно сформулировать условия Куна-Таккера, необходимые для того, чтобы векторы **X** и **λ** определяли стационарную точку:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda} \geq 0, \\
&\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) = 0, \qquad (9) \\
&\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0,\ i = 1 \div m, \\
&\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq 0.
\end{aligned}$$

Можно убедиться в том, что эти условия применимы также к задаче **минимизации,** за тем лишь исключением, что вектор **λ** должен быть неположительным. Как в случае задачи максимизации, так и задачи минимизации, множители Лагранжа, соответствующие ограничениям в виде равенств, по знаку не ограничены.

Необходимые условия Куна-Таккера являются также достаточными, если целевая функция и область допустимых решений (ОДР) обладают определенными свойствами, связанными с выпуклостью и вогнутостью. Эти свойства указаны в табл. 1.

Таблица 1

Тип оптимизации	Требуемые свойства	
	Целевая функция	ОДР
Максимизация	Вогнутая	Выпуклое множество
Минимизация	Выпуклая	Выпуклое множество

Напомним, что функция $f(\mathbf{X})$, определённая на выпуклом множестве **M,** называется **выпуклой (вогнутой),** если для любых точек $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}''$ из этого множества и любого $0 \leq \lambda \leq 1$ справедливо неравенство

$$f(\lambda\mathbf{X}'+(1-\lambda)\mathbf{X}'') \leq \lambda f(\mathbf{X}')+(1-\lambda)f(\mathbf{X}'')\ (f(\lambda\mathbf{X}'+(1-\lambda)\mathbf{X}'') \geq \lambda f(\mathbf{X}')+(1-\lambda)f(\mathbf{X}'')).$$

Если последнее неравенство при $0<\lambda<1$ и любых $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{X}''$ ($\mathbf{X}' \neq \mathbf{X}''$) выполняется как строгое, то $f(\mathbf{X})$ называется **строго выпуклой (строго вогнутой).**

Обычно легче определить, является ли целевая функция выпуклой или вогнутой, чем доказать, что ОДР представляет собой выпуклое множество. Между тем выпуклость ОДР может быть установлена путем исследования функций, формирующих ограничения. В связи с этим ниже приводится перечень соответствующих требований, проверка выполнения которых на практике не представляет больших трудностей. Для того чтобы установить эти требования, сформулируем задачу НП в общей постановке:

$$z = f(\boldsymbol{X}) \rightarrow \max\ (\min)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&g_i(\mathbf{X}) \leq 0,\ i = 1 \div r, \\
&g_i(\mathbf{X}) \geq 0,\ i = r+1 \div p, \\
&g_i(\mathbf{X}) = 0,\ i = p+1 \div m.
\end{aligned}$$

При этом функция Лагранжа имеет вид

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{X})-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[g_i(\mathbf{X})+S_i^2\right]-\sum_{i=r+1}^{p}\lambda_i\left[g_i(\mathbf{X})-S_i^2\right]-\sum_{i=p+1}^{m}\lambda_i g_i(\mathbf{X}),$$

где λ_i – множитель Лагранжа, ассоциированный с i-м ограничением. Требования, которые устанавливают достаточность условий Куна-Таккера, приведены в табл. 2.

Табл. 2 не охватывает все случаи, упомянутые в табл. 1. Это связано с тем обстоятельством, что ОДР может быть выпуклой и в то же время не соответствовать перечисленным в табл. 2 требованиям к функциям.

Таблица 2

Тип оптимизации	Требуемые свойства		
	$f(\mathbf{X})$	$g_i(\mathbf{X})$	λ_i
Максимизация	Вогнутая	Выпуклая Вогнутая Линейная	≥ 0 $(1\leq i\leq r)$ ≤ 0 $(r+1\leq i\leq p)$ Нет огранич. $(p+1\leq i\leq m)$
Минимизация	Выпуклая	Выпуклая Вогнутая Линейная	≤ 0 $(1\leq i\leq r)$ ≥ 0 $(r+1\leq i\leq p)$ Нет огранич. $(p+1\leq i\leq m)$

Требования, приведенные в табл. 2, обусловлены тем, что соответствующие ограничения порождают вогнутую функцию Лагранжа L $(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ в случае максимизации и выпуклую функцию в случае минимизации. Справедливость этого утверждения можно проверить непосредственно, учитывая следующий очевидный факт: если $g_i(\mathbf{X})$ – выпуклая функция, то функция $\lambda_i g_i(\mathbf{X})$ оказывается выпуклой при $\lambda_i>0$ и вогнутой при $\lambda_i<0$. С помощью аналогичных рассуждений нетрудно обосновать все остальные требования. Следует особо отметить, что линейная функция по определению является как выпуклой, так и вогнутой. Заметим также, что функция $-f$ – выпуклая, если функция f вогнутая, и наоборот.

Пример 5. Рассмотрим следующую задачу

$$z(\mathbf{X})=x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\min$$

при ограничениях

$$g_1(\mathbf{X})=2x_1+x_2-5\leq 0,\ g_2(\mathbf{X})=x_1+x_3-2\leq 0,\ g_3(\mathbf{X})=1-x_1\leq 0,\ g_4(\mathbf{X})=2-x_2\leq 0,\ g_5(\mathbf{X})=-x_3\leq 0.$$

Поскольку мы имеем дело с задачей минимизации, то $\boldsymbol{\lambda}\leq 0$. Запишем:

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\leq\mathbf{0},\ (2x_1,\ 2x_2,\ 2x_3)-(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

$$\lambda_1 g_1=\lambda_2 g_2=\ldots=\lambda_5 g_5=0,\ \mathbf{g(X)}\leq\mathbf{0}.$$

После упрощений получаем

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\le 0,$$
$$2x_1-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0,\ 2x_2-\lambda_1+\lambda_4=0,\ 2x_3-\lambda_2+\lambda_5=0,$$
$$\lambda_1(2x_1+x_2-5)=0,\ \lambda_2(x_1+x_3-2)=0,\ \lambda_3(1-x_1)=0,\ \lambda_4(2-x_2)=0,\ \lambda_5x_3=0,$$
$$2x_1+x_2\le 5,\ x_1+x_3\le 2,\ x_1\ge 1,\ x_2\ge 2,\ x_3\ge 0,$$
откуда $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0$, $\lambda_3=-2, \lambda_4=-4$. Т. к. и функция $z(\mathbf{X})$, и ОДР $\mathbf{g(X)\le 0}$ являются выпуклыми, то функция $L(\mathbf{X, S, \lambda})$ также должна быть выпуклой, и найденная стационарная точка определяет глобальный условный минимум.

К сожалению, данный пример показывает, что решение системы, порожденной условиями Куна-Таккера, сопряжено со значительными трудностями. Следовательно, описанный метод не подходит для численных расчетов. Для нелинейных задач с ограничениями в виде неравенств в общем случае нет достаточных условий существования экстремума (подобных условиям для задач без ограничений и задач с ограничениями-равенствами). Таким образом, за исключением перечисленных в табл. 1 и 2 случаев, когда такие условия можно установить **заранее,** не существует какого-либо приемлемого способа проверить, какой оптимум получен с помощью того или иного алгоритма нелинейного программирования – локальный или глобальный.

7.4. Квадратичное программирование. В ряде случаев теоретические построения Куна-Таккера служат основой для создания эффективных алгоритмов. Хорошим примером использования необходимых условий Куна-Таккера является **квадратичное программирование**, задача которого имеет вид:
$$z=\mathbf{CX}+\mathbf{X}^T\mathbf{DX}\to \max \text{ (или min)}$$
при ограничениях
$$\mathbf{AX\le b,\ X\ge 0},$$
где
$$\mathbf{X}=(x_1,\ \dots,\ x_n)^T,\ \mathbf{C}=(c_1,\ \dots,\ c_n),\ \mathbf{b}=(b_1,\ \dots,\ b_m)^T,\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}.$$

Функция $\mathbf{X}^T\mathbf{DX}$**, где D** – симметрическая матрица, является квадратичной формой, $\mathbf{X}^T\mathbf{DX}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j$. Матрица **D** будет отрицательно определённой в задаче максимизации и положительно определённой – в задаче минимизации. Это означает, что функция z является строго выпуклой по переменным **X** в случае задачи минимизации и строго вогнутой – в задаче максимизации. Ограничения в этой задаче предполагаются линейными, что гарантирует выпуклость ОДР.

Решение данной задачи основано на использовании необходимых условий Куна-Таккера (9). Т.к. целевая функция z строго выпуклая (или вогнутая) и ОДР задачи является выпуклым множеством, эти условия также и достаточны для установления наличия глобального оптимума.

Задачу квадратичного программирования рассмотрим для случая, когда целевая функция подлежит максимизации. Изменение формулировки задачи при минимизации целевой функции является тривиальным. Общая постановка задачи имеет следующий вид.

$$z=\mathbf{CX}+\mathbf{X}^T\mathbf{DX}\to\max$$

при ограничениях

$$\mathbf{G}(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\-\mathbf{E}\end{pmatrix}\mathbf{X}-\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\le\mathbf{0},$$

где $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица. Обозначим через $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2,\dots, \mu_m)^{\mathrm{T}}$ множители Лагранжа, соответствующие ограничениям

$\mathbf{AX}-\mathbf{b}\le\mathbf{0}$ и $-\mathbf{X}\le\mathbf{0}$ соответственно. Применяя условия Куна-Таккера, получаем

$$\boldsymbol{\lambda}\ge0,\ \boldsymbol{\mu}\ge0,$$
$$\nabla z-(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}})\nabla\mathbf{G}(\mathbf{X})=0,$$
$$\lambda_i(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)=0,\ i=1\div m,$$
$$\mu_jx_j=0,\ j=1\div n,$$
$$\mathbf{AX}\le\mathbf{b},\ -\mathbf{X}\le\mathbf{0}.$$

Отсюда имеем

$$\nabla z=\mathbf{C}+2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{D},\ \nabla\mathbf{G}(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\-\mathbf{E}\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathbf{S}=\mathbf{b}-\mathbf{AX}\ge\mathbf{0}$ вектор балансовых (остаточных) переменных. Тогда приведённые выше условия принимают следующий вид

$$-2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}-\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}=\mathbf{C},$$
$$\mathbf{AX}+\mathbf{S}=\mathbf{b},$$
$$\mu_jx_j=0=\lambda_iS_i \text{ для всех } i \text{ и } j,$$
$$\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu},\ \mathbf{X},\ \mathbf{S}\ge0.$$

Т.к. $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}=\mathbf{D}$, в результате транспонирования первой системы уравнений получим

$$-2\mathbf{DX}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, необходимые условия могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{2D} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \text{ для всех } i \text{ и } j,$$

$$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq 0.$$

Все уравнения, за исключением $\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i$, являются линейными относительно переменных **X**, **λ**, **μ** и **S.** Следовательно, исходная задача сводится к нахождению решения системы линейных уравнений, удовлетворяющего дополнительным условиям $\mu_j x_j=0=\lambda_i S_i$. Поскольку функция z строго вогнутая, а ОДР представляет собой выпуклое множество, **допустимое** решение, удовлетворяющее всем этим условиям, должно быть единственным и оптимальным.

Решение рассматриваемой системы находится путём реализации этапа 1 *M*-задачи. При этом единственным ограничением является необходимость удовлетворения условий $\lambda_i S_i=0=\mu_j x_j$. Выполнение этих условий означает, что если переменная λ_i в базисном решении принимает **положительное** значение, то переменная S_i не может быть базисной и принимать положительное значение. Аналогично переменные μ_jи $_jx_j$ не могут одновременно принимать положительные значения. Этап 1 завершается обращением в нуль всех искусственных переменных только в том случае, когда исходная задача имеет непустое множество допустимых решений.

Пример 6. Рассмотрим следующую задачу

$$z = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max$$

при ограничениях

$$2x_1 - x_2 \leq 6,\ x_1 + 2x_2 \leq 10,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

■ Эту задачу можно записать в матричной форме

$$z = (2;3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix},\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Условия Куна-Таккера принимают следующий вид.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Начальная симплекс-таблица для этапа 1 строится путём введения в первые два уравнения искусственных переменных R_1 и R_2, столбцы которых в симплекс-таблицах указывать не будем. Имеем первоначальную таблицу:

Итерация 0

БП	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	S_1	S_2	Реш.	Отн.
R_1	2	0	2	1	-1	0	0	0	2	–
R_2	0	$\underline{6}$	-1	2	0	-1	0	0	3	1/2
S_1	2	-1	0	0	0	0	1	0	6	–
S_2	1	2	0	0	0	0	0	1	10	5
Оц.	-2	-6	-1	-3	1	1	0	0		

Поскольку μ_2=0, вводимой в базис переменной может быть x_2, при этом из числа базисных исключается R_2. Получаем следующую симплекс-таблицу.

Итерация 1

БП	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	S_1	S_2	Реш.	Отн.
R_1	$\underline{2}$	0	2	1	-1	0	0	0	2	1
x_2	0	1	-1/6	1/3	0	-1/6	0	0	1/2	–
S_1	2	0	-1/6	1/3	0	-1/6	1	0	13/2	13/4
S_2	1	0	1/3	-2/3	0	1/3	0	1	9	9
Оц.	-2	0	-2	-1	1	0	0	0		

Т.к. μ_1=0, вводимой в базис переменной является быть x_1, при этом из числа базисных исключается R_1. Получаем следующую симплекс-таблицу.

Итерация 2

БП	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	S_1	S_2	Реш.
x_1	1	0	1	1/2	-1/2	0	0	0	1
x_2	0	1	-1/6	1/3	0	-1/6	0	0	1/2
S_1	0	0	-13/6	-2/3	1	-1/6	1	0	9/2
S_2	0	0	-2/3	-7/6	1/2	1/3	0	1	8

Итерация 2 даёт оптимальное решение рассматриваемой на этапе 1 задачи. Т.к. искусственные переменные вышли из базиса, то полученное решение x_1=1, x_2=1/2 являются допустимым. Оптимальное значение z вычисляется подстановкой полученного решения в выражение для целевой функции исходной задачи и равняется 7/4. ●

7.5. Графический метод решения задач НП. Так же как и в задачах ЛП, задачи с двумя переменными могут быть решены графически.

Пример 7. Найдём экстремумы функции $z=x_1+2x_2$ при ограничениях

$$x_1^2+x_2^2\le 9,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

■ ОДР – часть окружности с радиусом 3, которая расположена в 1-й четверти (рис. 1). Линиями уровня целевой функции являются параллельные прямые

$$x_2=-\frac{1}{2}x_1+C \qquad (10)$$

с угловым коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Проведём вектор $\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\mathbf{c}=(\lambda;2\lambda)$ (где λ – любое положительное число), перпендикулярный к каждой из линий уровня. Минимум достигается в точке $O(0;0)$, а максимум в точке A касания окружности и вектора $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$. Прямая OA проходит через начало координат перпендикулярно прямым (10). Поэтому её уравнение $x_2=2x_1$. Решаем систему $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=9, \\ x_2=2x_1, \end{cases}$ откуда находим $x_1=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, $x_2=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, $z_{max}=3\sqrt{5}$. ●

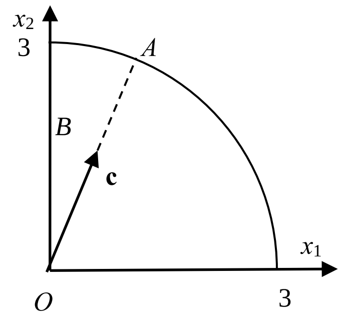

Рис. 1

Пример 8. Решим задачу нахождения экстремумов функции

$$z=-20-x_1^2+6x_1-x_2^2+12x_2$$

при ограничениях $x_1+x_2\le 5$, $2x_1+x_2\le 8$, $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

■ Выделим полные квадраты в выражении для функции z:

$$z=-20-(x_1^2-2\cdot x_1\cdot 3+9-9)-(x_2^2-2\cdot x_2\cdot 6+36-36)=-20-(x_1-3)^2+9-(x_2-6)^2+36=$$
$$=25-(x_1-3)^2-(x_2-6)^2.$$

ОДР – 4-угольник $OABD$ (рис. 2). Линиями уровня целевой функции являются концентрические окружности с центром в точке $O_1(3;6)$ с радиусами $0<r<5$. Минимум находится в точке $O(0;0)$ как самой удалённой от точки O_1, и равен $z_{min}=-20$. Максимум находится в точке E, как самой ближайшей к O_1 точки ОДР. Точка E находится на пересечении прямой AB $x_1+x_2=5$ и перпендикуляра к этой прямой, проведённого из точки O_1. Т.к. угловой коэффициент прямой $x_1+x_2=5$ равен -1, то угловой коэффициент перпендикуляра O_1E равен 1. Из уравнения прямой, проходящей через данную точку O_1 с угловым коэффициентом 1, получим x_2-6=x_1-3, откуда x_1-x_2=-3. Решая систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = -3, \end{cases}$ находим координаты точки E: x_1=1, x_2=4, при этом z_{max}=21. ●

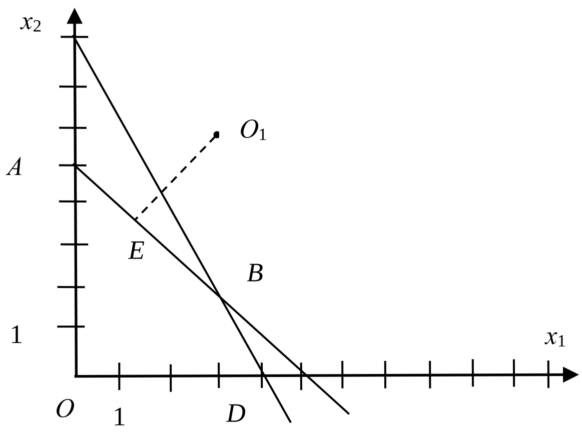

Рис. 2

Пример 9. Решим задачу нахождения экстремумов функции

$$z = 53 + x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 4x_2$$

при ограничениях $x_1x_2 \geq 5$, $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 5$.

■ Выделим полные квадраты в выражении для функции z:

$$z = 53 + (x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot 7 + 49 - 49) + (x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot 2 + 4 - 4) = (x_1-7)^2 - (x_2-2)^2.$$

ОДР – фигура ABD (рис. 3), ограниченная гиперболой x_1x_2=5 (кривая AD) и двумя прямыми AB и BD. Линиями уровня целевой функции являются концентрические окружности с центром в точке O_1(7;2). Максимум находится в точке A(1;5) как самой удалённой от точки O_1, и равен z_{max}=45. Минимум находится в точке E(5;2), как самой ближайшей к O_1 точки ОДР, и равен z_{min}=4. ●

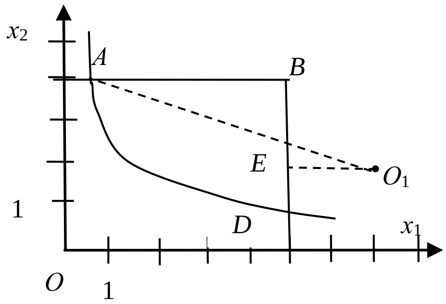

Рис. 3

8. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

8.1. Математическая модель задачи. Дробно-линейное программирование (ДЛП) относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Задача ДЛП в общем виде записывается следующим образом:

$$z = \frac{\sum_{j=1}^{n} e_j x_j + e_0}{\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + f_0} \to \max\ (\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

$$x_j \geq 0,\ i=1, 2, \ldots, m,\ j=1, 2, \ldots, n,$$

где e_j, f_j, b_i, a_{ij} – постоянные коэффициенты и $\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + f_0 \neq 0$.

Рассмотрим ДЛП в виде

$$z=\frac{e_1x_1+e_2x_2}{f_1x_1+f_2x_2}\to\max\ (\min) \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\le b_i,\ i=1,2,\ldots,m, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Будем считать, что $f_1x_1+f_2x_2\neq 0$.

Для решения этой задачи найдем область допустимых решений, определяемую ограничениями (2). Пусть эта область не является пустым множеством.

Из выражения (1) найдем x_2: $zf_1x_1+zf_2x_2=e_1x_1+e_2x_2$, $x_2(zf_2-e_2)=x_1(e_1-zf_1)$,

$x_2=\frac{e_1-zf_1}{zf_2-e_2}x_1$, $x_2=kx_1$, где $k=\frac{e_1-zf_1}{zf_2-e_2}$.

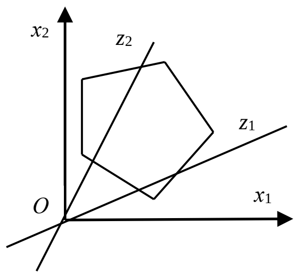

Рис. 1

Прямая $x_2=kx_1$ проходит через начало координат. При некотором фиксированном значении z угловой коэффициент k прямой тоже фиксирован и прямая займет определенное положение. При изменении значений z прямая $x_2=kx_1$ будет поворачиваться вокруг начала координат (рис. 1).

Установим, как будет вести себя угловой коэффициент k при монотонном возрастании z. Найдем производную от k по z:

$$\frac{dk}{dz}=k'=\frac{-f_1(zf_2-e_2)-f_2(e_1-zf_1)}{(zf_2-e_2)^2}=\frac{f_1e_2-f_2e_1}{(zf_2-e_2)^2}.$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от z не зависит. Следовательно, производная имеет постоянный знак, и при увеличении z угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. Если угловой коэффициент прямой имеет положительное значение, то прямая вращается против часовой стрелки, при отрицательном значении k – по часовой стрелке. Установив направление вращения, находим вершину или вершины многогранника, в которых функция принимает max(min) значение, либо устанавливаем неограниченность

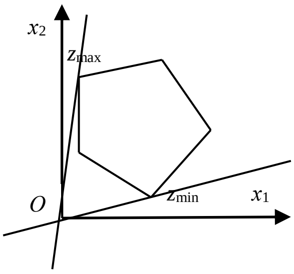

Рис. 2

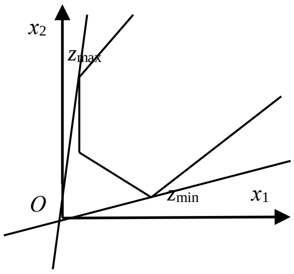

Рис. 3

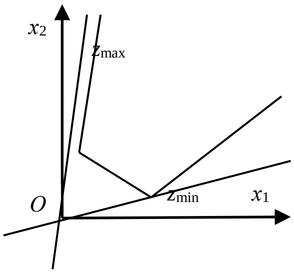

Рис. 4

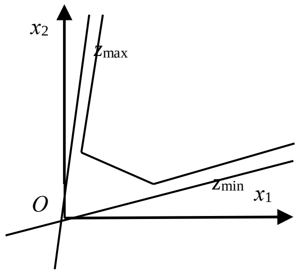

Рис. 5

целевой функции задачи. При этом возможны следующие случаи.

1. Область допустимых решений ограничена, максимум и минимум достигаются в ее угловых точках (рис. 2).
2. Область допустимых решений не ограничена, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения (рис. 3).
3. Область допустимых решений не ограничена, имеется один из экстремумов. Например, минимум достигается в одной из вершин области и имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 4).
4. Область допустимых решений не ограничена. Максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 5).

Алгоритм решения

1. Находим область допустимых решений.
2. Определяем угловой коэффициент k и устанавливаем направление поворота целевой функции.
3. Находим точку max (min) целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

8.2. Экономическая интерпретация задач ДЛП. Математическая модель задачи ДЛП может быть использована для определения рентабельности затрат на производство изделий, рентабельности продаж, затрат в расчете на рубль выпускаемой продукции, себестоимости изделий.

Обозначим:

r_j – прибыль предприятия от реализации единицы изделия j-го вида;

x_j – количество выпущенной продукции j-го вида;

s_j – цена единицы продукции j-го вида;

c_j – себестоимость производства единицы изделия j-го вида;

d_j – затраты на производство одного изделия j-го вида.

Задача рентабельности затрат ($P_з$) на производство изделий имеет вид

$$z = P_з = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j} \to \max.$$

Задача рентабельности продаж ($P_п$) имеет вид

$$z = P_п = \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j x_j} \to \max.$$

Задача определения затрат в расчете на рубль ($З_р$) товарной продукции записывается в виде

$$z = З_{\text{р}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j x_j} \to \min.$$

Задача нахождения себестоимости изделия ($C_{\text{и}}$) записывается как

$$z = C_{\text{и}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \to \min.$$

Указанные математические модели имеют системы ограничений в зависимости от условий задачи.

8.3. Применение задачи ДЛП для определения себестоимости изделий. Рассмотрим использование ДЛП для нахождения себестоимости изделий.

*Пример 1***.** Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на каждом из типов оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в табл. 1.

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 й 39 ч соответственно, оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

Таблица 1

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия, ч	
	A	*B*
I II III	2 1 12	8 1 3
Затраты на производство одного изделия, т. р.	2	3

■ Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 – количество изделий вида *A,* которое следует изготовить предприятию, x_2 – количество изделий вида *B*. Общие затраты на их производство составят ($2x_1+3x_2$) тыс. р., а средняя себестоимость одного изделия будет равна $\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}$. Математическая модель задачи примет вид

$$z = \frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2} \to \min$$

при ограничениях

$$2x_1+8x_2\le 26,$$
$$x_1+x_2\ge 4,$$
$$12x_1+3x_2\le 39,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

ОДР – треугольник ABC (рис. 6). Найдем x_2:

$$x_2=kx_1,$$

где $k=\dfrac{e_1-zf_1}{zf_2-e_2}=\dfrac{2-z}{z-3}$. Тогда $k'=\dfrac{f_1e_2-f_2e_1}{(zf_2-e_2)^2}=\dfrac{1}{(z-3)^2}$. Так как

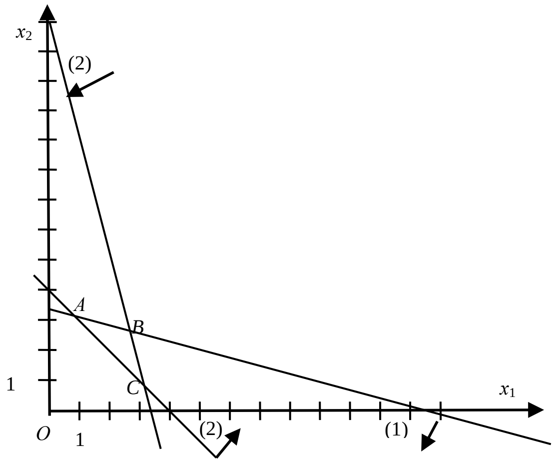

Рис. 6

$k'>0$, то функция $k=\dfrac{2-z}{z-3}$ возрастает. Это соответствует вращению прямой против часовой стрелки. Следовательно, в точке C (рис. 6) целевая функция будет иметь наименьшее значение (глобальный минимум). Найдем координаты точки C. Решая систему

$$\begin{cases} 12x_1+3x_2=39, \\ x_1+x_2=4, \end{cases}$$

получим $x_1=3$, $x_2=1$, т.е. $C(3,1)$, $\mathbf{X}_{\text{опт}}=(3,1)$, $z=9/4$.

Значит, предприятию следует выпускать 3 изделия вида A и 1 изделие вида B. При этом средняя себестоимость одного изделия будет минимальной и равной 2,25 тыс. р. ●

8.4. Сведение экономико-математической модели ДЛП к задаче линейного программирования. Задачу ДЛП можно свести к задаче линейного программирования и решить симплексным методом.

Обозначим

$$y_0=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} f_jx_j+f_0}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} f_jx_j+f_0\ne 0$$

и введем новые переменные $y_j=y_0x_j$.

Тогда задача примет вид

$$z=\sum_{j=1}^{n} e_jy_j \to \max\ (\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j-b_iy_0=0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_jy_j=1,$$

$$y_j \geq 0,\ y_0>0,\ i=1, 2, \ldots, m, j=1, 2, \ldots, n.$$

После нахождения оптимального решения полученной задачи, используя вышеуказанные соотношения, найдем оптимальное решение исходной задачи ДЛП.

Пример 2. Дана задача ДЛП

$$z=\frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}\to\max$$

при ограничениях

$$x_1-2x_2+x_3=2,$$
$$2x_1+x_2+x_4=6,$$
$$x_j\geq 0,\ j=1, 2, 3, 4.$$

■ Обозначим: $x_1+2x_2+1=\frac{1}{y_0}$, $y_0>0$, $x_1y_0=y_1$, $x_2y_0=y_2$, $x_3y_0=y_3$, $x_4y_0=y_4$, тогда $z=2x_1y_0-x_2y_0$. Преобразуем систему ограничений, умножив обе части всех ограничений на y_0, и перейдем к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4. Задача примет вид

$$z=2y_1-y_2\to\max$$

при ограничениях

$$-2y_0+y_1-2y_2+y_3=0,$$
$$-6y_0+2y_1+y_2+y_4=0,$$
$$y_0+y_1+2y_2=1,$$
$$y_j\geq 0,\ j=1, 2, 3, 4,\ y_0>0.$$

Запишем задачу в канонической форме:

$$z-2y_1+y_2=0,$$
$$-2y_0+y_1-2y_2+y_3=0,$$
$$-6y_0+2y_1+y_2+y_4=0,$$
$$y_0+y_1+2y_2+R_1=1,$$
$$y_j\geq 0,\ j=1, 2, 3, 4,\ y_0>0,\ R_1\geq 0.$$

Базисные переменные: y_3, y_4, R_1. Свободные переменные: y_0, y_1, y_2.

Итерация 0

БП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Реш.	Отн.
z	0	-2	1	0	0	0	–
y_3	-2	1	-2	1	0	0	–
y_4	-6	2	1	0	1	0	–
R_1	<u>1</u>	1	2	0	0	1	1
Оц.	1	1	2	0	0		

Итерация 1

БП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Реш.	Отн.
z	0	-2	1	0	0	0	–
y_3	0	<u>3</u>	2	1	0	2	2/3
y_4	0	8	13	0	1	6	3/4
y_0	1	1	2	0	0	1	1

Итерация 2

БП	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Реш.
z	0	0	7/3	2/3	0	4/3
y_1	0	1	2/3	1/3	0	2/3
y_4	0	0	2/3	-8/3	1	2/3
y_0	1	0	4/3	-1/3	0	1/3

Получили

$$\mathbf{Y}_{опт}=(1/3, 2/3, 0, 0, 2/3),$$

тогда

$$x_1=\frac{y_1}{y_0}=2,\ x_2=\frac{y_2}{y_0}=0,\ x_3=\frac{y_3}{y_0}=0,\ x_4=\frac{y_4}{y_0}=2,$$

$\mathbf{X}_{опт}=(2, 0, 0, 2)$, $z_{max}=4/3$. ●

9. ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. МЕТОД ГОМОРИ

При рассмотрении целого ряда прикладных задач мы имеем дело с неделимыми объектами (людьми, транспортными средствами и т.п.). Примером может служить задача о формировании пакета заказов. Попытка решения таких задач симплекс-методом приводит, как правило, к нецелочисленным величинам, не имеющим в данном случае смысла. Можно попытаться получить приближенное решение задачи, округляя полученные величины до целых значений. Однако при этом может оказаться, что округленное решение не является планом задачи и существенно отличается от точного решения.

Дискретное, или целочисленное, программирование (ЦП)– это раздел математического программирования, решающий экстремальные задачи, в которых на переменные накладывается условие целочисленности. В целом методы целочисленной оптимизации можно разделить на две основные группы: точные и приближенные. К точным относятся методы отсечения и метод ветвей и границ.

Общая идея решения задачи целочисленного программирования методами отсечения состоит в следующем. Сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план целочисленный, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение. При этом:

а) оно должно быть линейным;

б) должно отсекать оптимальный нецелочисленный план;

в) не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется **правильным отсечением**.

Далее задача решается с учетом нового ограничения. После этого в случае необходимости добавляется еще одно ограничение и т.д.

Геометрически добавление каждого ограничения отвечает проведению поверхности, которая отсекает от области допустимых решений некоторую его часть вместе с оптимальной точкой с нецелыми координатами, но не затрагивает ни одной из целых точек этого многогранника. В результате новый многогранник решений содержит все целые точки, заключающиеся в первом начальном многограннике решений, и полученное на этом многограннике оптимальное решение может быть целочисленным. Один из алгоритмов решения задачи ЦП, предложенный американским математиком Р. Гомори, основан на симплекс методе.

Пусть задача ЛП

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=1, 2, \ldots, m, \qquad (2)$$

x_j – *неотрицательны и целочисленны*, $j=1, 2, \ldots, n$ (3)

имеет конечный оптимум и на последнем шаге ее решения симплекс-методом получены следующие уравнения, выражающие базисные переменные $x_1, \ldots, x_m$ через свободные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ оптимального решения:

$$x_1 = \beta_1 - \alpha_{1,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n} x_n,$$

$$x_2 = \beta_2 - \alpha_{2,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n} x_n,$$

…………………………………..

$$x_i = \beta_i - \alpha_{i,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{in} x_n,$$

…………………………………..

$$x_m = \beta_m - \alpha_{m,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn} x_n,$$

Константы β_i и α_{ij}, $i=1, \ldots, m$, $j=m+1, \ldots, n$, взяты из последней симплекс таблицы (без требования целочисленности):

Б.П.	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	Реш
z	0	0	…	0	…	0	$\bar{c}_{m+1}$	…	$\bar{c}_n$	β_0
x_1	1	0	…	0	…	0	$\alpha_{1,m+1}$	…	α_{1n}	β_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	0	0	…	1	…	0	$\alpha_{i,m+1}$	…	α_{in}	β_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	0	…	0	…	1	$\alpha_{m,m+1}$	…	α_{mn}	β_m

Пусть в оптимальном решении $\mathbf{X}^*=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$ решение β_i нецелое. Тогда $\beta_i=[\beta_i]+f_i$, $\alpha_{ij}=[\alpha_{ij}]+f_{ij}$, где $N=[a]$ – целая часть числа a, f_i и f_{ij} – дробные части чисел β_i и α_{ij}. Т.к. β_i – нецелое, то $0<f_i<1$; α_{ij} может быть нецелым, поэтому $0 \le f_{ij} < 1$. После подстановки разбиения коэффициентов на целую и дробную части получим:

$$x_i - [\beta_i] - f_i + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j + \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j = 0 \text{ или } f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j = x_i - [\beta_j] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j .$$

Поскольку все переменные x_i, $i=1, \ldots, n$ должны быть целыми, то правая часть последнего выражения должна быть целочисленной, откуда следует, что левая часть также должна принимать целые значения. Далее, т.к. $f_{ij} \ge 0$ и $x_j \ge 0$ для любых i, j, то $\sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \ge 0$. Следовательно, должно выполняться неравенство $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \le f_i$. Т.к. дробная часть $f_i<1$, то $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j < 1$. Но левая часть должна принимать целые значения; следовательно, условием целочисленности будет $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij} x_j \le 0$ (0 – ближайшее целое, меньше 1). Это ограничение можно записать в виде равенства с балансовой переменной S_i: $f_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j + S_i = 0$ или $S_i = \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j - f_i$ или

$$S_i - \sum_{j=m+1}^{n} f_{ij}x_j = -f_i, \qquad (4)$$

причем S_i по определению должно принимать целые значения. Такое ограничение-равенство определяет отсечение Гомори для полностью целочисленной задачи. Это ограничение-равенство добавляется к последней симплекс-таблице.

Если после итерации окажется, что в оптимальном плане задачи (1)–(3) имеется несколько нецелых координат, то для построения отсекающей гиперплоскости целесообразно выбрать переменную, имеющую наибольшую дробную часть.

Признаком отсутствия целочисленного решения служит появление в симплекс-таблице хотя бы одной строки с дробным свободным членом (решением) и целыми остальными коэффициентами, т.к. в этом случае соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах.

Прежде чем разобрать пример решения задачи ЦП, вкратце рассмотрим алгоритм **двойственного симплекс-метода**. Этот метод удобно применять в следующей ситуации:

а) выполнены условия **оптимальности** решения, т.е. элементы *z*-строки имеют требуемый знак (неотрицательный в задаче максимизации и неположительный – в задаче минимизации);

б) в столбце «решение» имеются **отрицательные числа** (в строках ограничений).

Решение задачи двойственным симплекс-методом включает в себя следующие этапы:

1^0. Если в задаче есть ограничения-неравенства $\geq$, то умножением на (-1) их приводят к виду $\leq$.

2^0. Задачу приводят к каноническому виду, все переменные разбиваются на базисные и свободные. При этом возможно использование недопустимого базиса.

3^0. Выбирают **разрешающую строку**, соответствующую наибольшей по модулю отрицательной базисной переменной. Эта переменная исключается из базиса.

4^0. Включаемая в базис переменная (**разрешающий столбец**) выбирается по наименьшему (в задаче минимизации) или по наименьшему по модулю (в задаче максимизации) отношению коэффициентов *z*-строки к соответствующим **отрицательным** коэффициентам разрешающей строки. (При наличии альтернатив выбор делается произвольно.) Если знаменатели всех отношений равны нулю или положительные, задача не имеет решений.

5^0. Для получения следующего решения осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Проверяют это решение на допустимость. Если оно допустимо, то найдено решение задачи. В противном случае переходят к новому решению (этап 3^0).

Пример 1. Рассмотрим типичную раскройную задачу, имеющую следующий вид. Трубы длиной L, имеющиеся в достаточном количестве, следует распилить на заготовки двух видов: длиной l_1 и длиной l_2, причём заготовок первого вида должно быть получено не менее n_1 штук и заготовок второго вида – не менее n_2 штук. Каждая труба может быть распилена на указанные заготовки несколькими способами. Требуется найти число труб, распиливаемых каждым способом, с тем, чтобы необходимое количество заготовок было получено из наименьшего количества труб, поступающих в раскрой.

Для решения задачи необходимо определить всевозможные варианты распила труб на заготовки нужной длины, составить математическую модель в виде задачи целочисленного программирования, решить задачу методом отсечений Гомори, найти все оптимальные решения задачи.

■ Пусть L=3,2 м, l_1=1,2 м, l_2=1,0 м, n_1=86, n_2=94. Разделим L=3,2 на l_1=1,2. Получим 2 и 0,8 м в остатке. Так как $0{,}8<l_2=1{,}0$, то этот остаток идёт в отходы, а мы получаем 1-й вариант распила – $2*l_1+0*l_2$. Если от трубы L=3,2 м отпилить 1 заготовку длиной l_1=1,2 м, то останется обрезок длиной 2,0 м, из которого ещё выйдет две заготовки длиной l_2=1,0 м, и мы получаем 2-й вариант распила – $1*l_1+2*l_2$. Аналогично получаем последний, 3-й, вариант распила – $0*l_1+3*l_2$.

Пусть x_1, x_2, x_3 – число труб, распиливаемых по 1-, 2- и 3-му вариантам соответственно. Общее количество труб обозначим z. Тогда математическая модель задачи примет вид:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 86, \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 94, \\ x_i \ge 0, x_i - \textit{целочисл.}, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Решаем вначале задачу с ослабленными ограничениями – без учёта целочисленности. Запишем задачу в канонической форме:

$$z - x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 = -86, \\ -2x_2 - 3x_3 + x_5 = -94, \\ x_i \ge 0, i = 1 - 5. \end{cases}$$

При этом используем двойственный симплекс-метод.

Итерация 0

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	-1	-1	-1	0	0	0
x_4	-2	-1	0	1	0	-86
x_5	0	-2	$\underline{-3}$	0	1	-94
Отн.	–	1/2	1/3	–	–	

Итерация 1

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	-1	-1/3	0	0	-1/3	94/3
x_4	-2	$\underline{-1}$	0	1	0	-86
x_3	0	2/3	1	0	-1/3	94/3
Отн.	1/2	1/3	–	–	–	

Итерация 2

Б.П	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	-1/3	0	0	-1/3	-1/3	60
x_2	2	1	0	-1	0	86
x_3	$\underline{-4/3}$	0	1	2/3	-1/3	-26
Отн	1/4	–	–	–	1	

*Итерация*3

Б.П	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Реш
z	0	0	-1/4	-1/2	-1/4	133/2
x_2	0	1	3/2	0	-1/2	47
x_1	1	0	-3/4	-1/2	1/4	39/2

Решение нецелочисленное – записываем отсечение по переменной, имеющей наибольшую дробную часть, то есть по переменной x_1. Для этого запишем уравнение, соответствующее переменной x_1, выделив в каждом коэффициенте целую и дробную части. Напомним, что целая часть числа a (обозначается $[a]$) – это наибольшее целое, не превосходящее данного; дробная часть числа a (обозначается $\{a\}$) – это разность между самим числом и его целой частью. Тогда имеем:

$$(1+0)x_1+(-1+1/4)x_3+(-1+1/2)x_4+(0+1/4)x_5=(19+1/2).$$

Затем в этом уравнении оставим только дробные части (с противоположным знаком), добавив в левую часть балансовую переменную S:

$$-1/4x_3-1/2x_4-1/4x_5+S=-1/2.$$

Это отсечение является дополнительным ограничением, учёт которого в последней итерации приводит к следующим таблицам:

Итерация 3.1

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	Реш
z	0	0	-1/4	-1/2	-1/4	0	133/2
x_2	0	1	3/2	0	-1/2	0	47
x_1	1	0	-3/4	-1/2	1/4	0	39/2
S	0	0	$\underline{-1/4}$	-1/2	-1/4	1	-1/2
Отн.	–	–	1	1	1	–	

Итерация 4

Б.П.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	Реш
z	0	0	0	0	0	-1	67
x_2	0	1	0	-3	-2	6	44
x_1	1	0	0	1	1	-3	21
x_3	0	0	1	2	1	-4	2

Решение оптимально, допустимое и целочисленное. При этом z_{min}=67, $\mathbf{X}^{(1)}$=(21;44;2;0;0). Решение альтернативно, так как коэффициенты в z-строке при свободных переменных x_4 и x_5 равны нулю. Из оптимальной таблицы имеем:

$$z=67+S,\ x_2=44+3x_4+2x_5-6S,\ x_1=21-x_4-x_5+3S,\ x_3=2-2x_4-x_5+4S. \qquad (5)$$

Альтернативные решения получаются при значении свободной переменной S, входящей в выражение для z, равной нулю (S=0), и при любых значениях свободных переменных x_4 и x_5, не входящих в выражение для z, которые «позволяет» принять система ограничений, чтобы базисные переменные x_1, x_2 и x_3 оставались допустимыми: $0\le x_4\le\min(\infty,21,1)=1$ и $0\le x_5\le\min(\infty,21,2)=2$, то есть при $0\le x_4\le 1$ и $0\le x_5\le 2$. Поэтому задача будет дополнительно иметь оптимальные целочисленные решения, когда пара переменных (x_4, x_5) принимает значения (1,0), (0,1) и (0,2) (при значениях (1,2) переменная x_3 перестаёт быть допустимой), а S=0. Подставляя эти значения в систему ограничений (5), найдём эти оптимальные решения:

$$\mathbf{X}^{(2)}=(20;47;0;1;0),\ \mathbf{X}^{(3)}=(20;46;1;0;1),\ \mathbf{X}^{(4)}=(19;48;0;0;2).$$

Наличие альтернативных решений позволяет осуществить выбор одного из них, руководствуясь дополнительными критериями, не учитываемыми в математической модели задачи. Например, из условия данной задачи следует, что распиливание труб даёт меньше всего отходов по второму варианту, поэтому естественно при выборе одного из четырёх оптимальных решений отдать предпочтение решению $\mathbf{X}^{(4)}$, при котором максимальное число труб (x_2=48) распиливается без отходов. ●

10. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия математического программирования (МП).
2. Классификация задач МП.
3. Различные формы задач линейного программирования (ЛП).
4. Графический метод решения задачи ЛП.
5. Введение в симплекс-метод. Симплекс-таблица.
6. Алгоритм симплекс-метода. Определение ведущих столбца и строки.
7. Основная теорема симплекс-метода.
8. Искусственное начальное решение (М-задача).
9. Теорема о связи оптимальных решений М-задачи и исходной задачи.
10. Алгоритм построения двойственной задачи.
11. Связь между решениями прямой и двойственной задач. Основная лемма и основная теорема двойственности.
12. Нахождение решения двойственных задач.
13. Транспортная задача по критерию стоимости (ТЗ). Открытая и закрытая транспортные модели. Теорема о необходимом и достаточном условии разрешимости ТЗ.
14. Нахождение начального опорного плана ТЗ методом северо-западного угла.
15. Нахождение начального опорного плана ТЗ методом наименьшей стоимости.
16. Определение оптимального плана ТЗ методом потенциалов. Уравнения потенциалов и построение оценок.
17. Транспортная задача с усложнениями. Блокирование поставок в некоторые пункты и обеспечение определённого количества гру-

зов.
18. Транспортная задача с усложнениями. Обеспечение поставок не более и не менее определённого количества грузов.
19. Транспортная задача по критерию времени. Постановка задачи.
20. Транспортная задача по критерию времени. Алгоритм решения.
21. Решение распределительной задачи с помощью венгерского метода.
22. Экстремальные задачи без ограничений.
23. Необходимое и достаточное условия экстремума функции.
24. Метод Ньютона-Рафсона.
25. Метод множителей Лагранжа (ограничения в виде равенств).
26. Условия Куна-Таккера решения задачи НП. Достаточность условий Куна-Таккера.
27. Дробно-линейное программирование (ДЛП). Математическая модель задачи.
28. Геометрическая и экономическая интерпретация задач ДЛП.
29. Применение ДЛП для определения себестоимости изделий. Сведение задачи ДЛП к задаче ЛП.
30. Целочисленное программирование. Метод отсечений. Алгоритм Гомори. Геометрическая интерпретация метода отсечений.

11. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

Линейное программирование и двойственная задача

1-10. *Для нижеследующих задач:* 1) *составить математическую модель задачи;* 2) *решить задачу графически:* 3) *решить задачу симплекс-методом;* 4) *составить двойственную задачу и из оптимальной таблицы прямой задачи найти решение двойственной.*

1. Для изготовления изделий A и B предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия A требуется 12 кг сырья первого вида, 10 кг – второго и 3 кг – третьего, а на производство одного изделия B соответственно 3 кг, 5 кг и 4 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 684 кг, второго – 690 кг. При этом по технологическим соображениям сырья третьего вида необходимо затратить не менее 120 кг. Одно изделие A дает предприятию 6 тыс. руб. прибыли, а изделие B – 2 тыс. руб. прибыли. Составить план производства изделий A и B, максимизирующий общую прибыль предприятия.

2. Завод ремонтирует тракторы двух типов: первого – мощностью 300 л. с. и второго – мощностью 200 л. с., используя при этом новое технологическое оборудование при ремонте тракторов первого типа (1 час на ремонт одного трактора). За месяц завод может отремонтировать не более 150 тракторов. За ремонт трактора первого типа завод получает чистой прибыли 1 тыс. руб., а за ремонт второго типа – 2 тыс. руб. Составить месячный план ремонта тракторов, при котором завод получит не менее 240 тыс. руб. прибыли и суммарная мощность отремонтированных тракторов будет наибольшей, если технологическое оборудование можно использовать не более 50 час.

3. Предприятие производит изделий *A* и *B* и использует сырье трех видов. На производство одного изделия *A* требуется 3 т сырья первого вида, 2 т – второго и 2 т – третьего вида, а на производство одного изделия *B* соответственно 4 т, 1 т и 3 т. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 120 т, второго – 60 т. Условия поставки и хранения сырья третьего вида таковы, что его расход должен быть не менее 30 т. Одно изделие *A* дает предприятию 2 тыс. руб. прибыли, а изделие *B* – 3 тыс. руб. прибыли. Составить план производства изделий *A* и *B*, максимизирующий общую прибыль предприятия.

4. Изготавливается продукция двух видов $П_1$ и $П_2$. Для изготовления этой продукции требуется использовать два вида сырья S_1, S_2. Количество единиц сырья, необходимое для изготовления единицы каждого из видов продукции, а также

Виды сырья	$П_1$	$П_2$	Запасы сырья
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
Доход	7	5	

доход, получаемый предприятием от реализации единицы каждого вида продукции, заданы в табл. справа. Требуется составить такой план выпуска продукции видов $П_1$ и $П_2$, при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным. При этом необходимо выпустить не менее двух единиц продукции вида $П_2$.

5. Автозавод выпускает грузовики грузоподъемностью 3 т и 2 т. Общая грузоподъемность автомобилей, выпущенных заводом за неделю, должна быть не менее 600 т. На производство одного трехтонного грузовика затрачивается 400 человеко-часов рабочего времени и 9000 руб. на закупку сырья, а на производство одного двухтонного – 500 человеко-часов и 26000 руб. на закупку сырья. Предприятие располагает в неделю 400000 человеко-часов рабочего времени и может закупить сырья на сумму 54000000 руб. Найти недельный план выпуска автомобилей, максимизирующий суммарную прибыль завода, если продажа трехтонного грузовика приносит прибыль в 100000 руб., а двухтонного (повышенной проходимости) – 300000 руб.

6. Предприятие производит продукцию двух видов $П_1$ и $П_2$. Для изготовления этой продукции требуется использовать два вида сырья S_1, S_2. Количество единиц сырья, необходимое для

Виды сырья	$П_1$	$П_2$	Запасы сырья
S_1	5	4	20
S_2	1	2	8
Доход	1	2	

изготовления единицы каждого из видов продукции, а также доход, получаемый предприятием от реализации единицы каждого вида продукции, заданы в табл.

Требуется составить такой план выпуска продукции видов $П_1$ и $П_2$, при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным. При этом необходимо выпустить не менее одной единицы продукции вида $П_1$.

7. Для изготовления изделий *A* и *B* предприятие использует два вида сырья. На производство одного изделия *A* требуется 8 т сырья первого вида, 26 т – второго, а на производство одного изделия *B* соответственно 13 т и 16 т. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 104 т, второго – 208 т. Кроме того, служба сбыта предприятия, проведя маркетинговые исследования, установила, что конъюнктура рынка требует, чтобы изделий *A* производилось не менее 6 штук. Производство одного изделия *A* дает предприятию 6 тыс. руб. прибыли, а изделия *B* – 2 тыс. руб. Составить план производства, максимизирующий общую прибыль.

8. Предприятие строит дома двух проектов *A* и *B* и использует три вида основных стройматериалов. На строительство дома по проекту *A* требуется 5 м^3 кирпича, 10 м^3 пиломатериалов и 1 т цемента, а по проекту *B* – соответственно 6 м^3 кирпича, 7 м^3 пиломатериалов и 2 т цемента. На плановый период предприятие обеспечено кирпичом в количестве 30 м^3 и пиломатериалами в количестве 49 м^3. Из-за трудностей с хранением и большими запасами цемента его расход не должен быть менее 6 т. Строительство одного дома по проекту *A* дает предприятию 4 млн. руб. прибыли, а по проекту *B* – 3 млн. руб. прибыли. Составить план работы предприятия по строительству домов, максимизирующий его общую прибыль, если оно может само выбирать, сколько и по каким проектам строить дома. При этом незавершенное строительство подлежит оплате, пропорциональной выполненным работам.

9. Швейная мастерская изготавливает простые и утепленные куртки и использует три вида ткани. На производство одной утепленной куртки требуется ткани первого вида на 11 руб., второго – на 13 руб. и третьего – на 3 руб., а на производство простой куртки – соответственно на 9 руб., 8 руб. и 4 руб. На плановый период закуплено ткани первого вида на 99 руб., второго вида – на 104 руб. При производстве изделий из соображений рентабельности всего производства необходимо использовать ткани третьего вида не менее чем на 12 руб. Реализация одной утепленной куртки дает предприятию 50 руб. прибыли, а реализация простой куртки – 40 руб. прибыли. Составить план производства курток, максимизирующий общую прибыль предприятия при полной реализации произведенной продукции.

10. Изготавливается продукция двух видов $П_1$ и $П_2$. На производство одного изделия $П_1$ требуется 19 кг сырья первого вида, 22 кг – второго и 7 кг – третьего, а на производство одного изделия $П_2$ соответственно 11 кг, 38 кг и 8 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 209 кг, второго – 418 кг. При этом по технологическим соображениям сырья третьего вида необходимо затратить не менее 56 кг. Одно изделие $П_1$ дает предприятию 5 тыс. руб. прибыли, а изделие $П_2$ – 4 тыс. руб. прибыли. Составить план производства изделий $П_1$ и $П_2$, максимизирующий общую прибыль предприятия.

11 (38 вариантов). *Для приведённой ниже задачи составить математическую модель, решить графически и симплекс-методом, показать соответствие опорных решений и вершин допустимой области.*

Формулировка задачи. Предприятие выпускает продукцию двух разновидностей. Каждый вид продукции проходит обработку на трёх станках. При обработке 1 т продукции I вида первый станок используется a_{11} ч., второй станок – a_{21} ч., третий станок – a_{31} ч.. При обработке 1 т продукции II вида первый станок используется a_{12} ч., второй станок – a_{22} ч., третий станок – a_{32} ч. Время работы станков ограничено и не может превышать для первого станка b_1 ч., для второго b_2 ч., для третьего b_3 ч. При реализации 1 т продукции I вида предприятие получает прибыль c_1 руб., а при реализации 1 т продукции II вида – c_2 руб. Найти оптимальный план выпуска продукции каждого вида, дающий максимальную прибыль от реализации всей продукции.

Варианты 1а-8а

№№	a_{i1}	a_{i2}	b_i.	c_j		№№	a_{i1}	a_{i2}	b_i.	c_j
1а	1,1,3	4,1,1	28,10,24	4,4		**5а**	1,1,2	5,1,1	30,10,18	3,3
2а	1,3,2	3,4,1	24,37,18	6,8		**6а**	1,2,3	2,3,2	14,23,27	4,6
3а	0,1,5	1,4,4	6,27,55	2,8		**7а**	1,2,3	2,3,2	16,26,29	6,9
4а	1,1,7	2,1,6	22,12,77	7,7		**8а**	1,1,3	4,1,1	24, 9,23	6,6

Варианты 1-30.

№№	a_{i1}	a_{i2}	b_i.	c_j		№№	a_{i1}	a_{i2}	b_i.	c_j
1	1,1,3	4,1,1	28,10,24	3,6		**16**	1,3,7	2,4,4	22,46,70	6,8
2	1,3,2	3,4,1	24,37,18	3,5		**17**	2,1,5	3,1,3	30,11,45	5,6
3	0,1,5	1,4,4	6,27,55	2,9		**18**	1,3,5	2,5,4	18,46,55	6,10
4	0,1,1	1,4,1	7,29,11	2,5		**19**	1,3,2	3,4,1	24,37,18	2,4
5	1,1,7	2,1,6	22,12,77	6,7		**20**	1,3,7	2,5,4	22,56,77	4,7
6	1,4,5	1,3,3	10,31,35	8,6		**21**	2,3,2	4,4,1	36,40,20	5,8
7	1,1,2	5,1,1	30,10,18	3,9		**22**	1,4,4	1,3,1	13,40,24	8,6
8	1,2,3	2,3,2	14,23,27	4,7		**23**	1,2,4	4,3,1	28,26,32	2,4
9	1,2,3	2,3,2	16,26,29	7,12		**24**	1, 3,5	3,5,2	27,49,50	5,12
10	1,1,3	4,1,1	24, 9,23	6,12		**25**	1,3,5	3,5,1	27,49,45	2,4
11	0,2,3	1,5,2	8,44,27	2,10		**26**	1,3,10	2,5,3	28,71,100	6,10
12	1,2,5	2,3,2	20,31, 50	4,6		**27**	1,1,5	3,2,2	24,17,45	2,5
13	1,3,3	2,5,2	14, 36,27	12,23		**28**	1,3,5	2,5,2	18, 46,45	6,11

14	2,5,2	3,4,1	33,51,18	3,4		**29**	1,4,3	3,5,1	33,62,30	3,6
15	0,1,6	1,4,5	7,28, 54	3,4		**30**	1,3,3	2,4,1	26,54,27	6,8

12 (30 вариантов). *Симплекс-методом решить стандартную задачу линейного программирования* (*переменные* x_1, x_2, x_3 *неотрицательны*)

$$z=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 \rightarrow \max$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \le b_i;\ i=1,\ 2,\ 3.$$

№№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	c_j		№№	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	c_j
1	1,2,1	2,-1,2	3,1,-2	5,8,1	1,1,-1		**16**	2,1,1	-1,2,-1	2,1,0	9,7,1	2,2,-1
2	2,1,0	0,3,-1	3,0,2	2,1,3	5,6,8		**17**	1,1,2	2,0,-1	-1,1,1	8,6,5	1,1,-2
3	2,-1,0	0,3,-1	3,0,1	3,2,1	3,2,5		**18**	1,2,1	-1,3,1	1,2,0	6,9,4	2,-1,1
4	2,0,1	-1,1,0	1,2,1	4,6,6	3,2,-1		**19**	1,1,1	1,0,2	1,2,1	1,2,2	3,3,2
5	1,0,1	-1,1,0	2,3,2	3,5,3	1,1,1		**20**	2,1,1	1,-1,1	-3,2,1	4,7,8	1,2,-1
6	5,1,0	3,2,1	0,4,1	8,4,1	1,3,1		**21**	1,2,1	1,-1,0	-1,1,4	3,5,9	1,-1,1
7	1, 0,1	2,1,0	0,1,1	3,1,1	1,2,1		**22**	0,1,2	2,-1,3	1,3,1	6,4,10	1,2,-5
8	2, 1,1	1,2,1	1,1,1	2,3,5	3,2, 1		**23**	1,2,- 1	1,-1,1	-1,0,1	4,2,8	2,3, 6
9	1, 0,1	0,2,-1	1,0,3	1,2,3	3,2,5		**24**	2,-1, 1	1,0,2	3,2,-1	5,7,4	1,1,-1
10	3,1,0	0,-2,3	1,0,1	3,6,1	9,5,3		**25**	0,2,3	1,-1,1	1,2,0	7,5,3	3,-1,2
11	3,1,1	4,3,1	1,2,-1	5,4,1	2,1,3		**26**	2,1,0	3,2,1	-1,1,2	6,7,9	4,-1,2
12	1,-1,2	1, 0,2	2,1,1	2,6,3	2,-1,2		**27**	1,0,2	-2,1,3	2,1,1	2,4,3	2,-1,1
13	1,2,-1	2,1,0	1,0,2	3,2,4	2,1,1		**28**	2,1,1	1,1,1	1,-2,1	8,3,5	1,1,-1
14	3,-1,-4	-1,2,3	1,0,4	7,6,10	-1,3,-1		**29**	2,0,1	1,1,0	1,2,1	4,6,6	3,2,8
15	1,2,0	2,-1,1	1,1,2	5,1,3	2,-1,7		**30**	1,0,2	1,1,0	1,2,-1	2,2,4	1,1,2

13 (10 вариантов). *Решить задачу ЛП* (*переменные* x_1, x_2 *неотрицательны*)

$$z=c_1x_1+c_2x_2 \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \ge b_1,$$

$$a_{i1}x_1+a_{i22}x_2 \le b_{i2},\ i=2,3,4,$$

1) *симплекс-методом*; 2) *графически*; 3) *поставить двойственную задачу*; 4) *найти её решение из оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи;* 5) *исследовать влияние на допустимость новых правых частей ограничений задачи;* 6) *исследовать влияние на оптимальность новых целевых функций задачи*.

№№	a_{i1}	a_{i2}	b_i	c_j	Нов. пр. части	Нов. пр. части	Нов.целев. ф-ии	Нов.целев. ф-ии
1	1,1,1,-1	1,-1,2,1	1,2,5,1	2,2	3,3,6,3	4,2,1,6	3,2	1,5
2	1,2,1,-1	1,-1,2,2	2,6,8,4	6,3	1,4,6,6	14/5,17/5,8/5,28/5	8,3	2,5
3	2,1,1,-1	1,-2,1,2	2,2,5,4	5,2	1,3,6,3	5,10,1,6	6,1	3,6
4	1,1,1,-1	1,-1,2,1	2,4,10,2	7,2	1,3,12,3	6,8,3,6	8,1	4,9
5	2,-1,1,2	1,1,2,-1	1,2,10,10	4,2	5,1,5,5	3,3,1,2	4,3	1,4
6	3,1,-1,2	2,2,1,-3	6,14,4,14	5,2	7,14,7,14	10,2,14,27	4,2	2,5
7	3,1,-1,1	2,2,2,-1	6,16,8,10	6,2	6,15,6,9	11,2,13,31	5,2	2,6
8	3,2,-2,3	1,1,1,-1	3,16,8,9	5,2	5,10,5,5	3,4,7,8	6,2	2,5
9	2,1,1,-1	1,-2,1,2	2,2,4,5	5/2,1	1,3,3,6	5,10,6,1	3,1/2	3/2,3
10	2,-1,2,1	1,1,-1,2	1,2,10,10	2,1	5,1,5,5	3,3,2,1	2,3/2	1/2,2

Транспортная задача по критерию стоимости

1–20. *Решить следующую задачу: в* m *пунктах отправления* (ПО) *имеется однородный груз в количествах* a_1, a_2, …, a_m. *Этот груз* *нужно перевезти в* n *пунктов назначения* (ПН), *потребности которых равны* b_1, b_2, …., b_n. *Стоимость перевозки единицы груза из* i*-го* ПО *в* j*-й* ПН *равна* c_{ij}. *Требуется план перевозки грузов из* ПО *в* ПН, *при котором суммарные расходы на перевозку будут минимальными. Количество груза в* ПО, *потребности в* ПН *и цены перевозок указаны в таблицах. Например, в задаче* **1** a_1=9, a_2=31, a_3=20 (m=3), b_1=20, b_2=14, b_3=12 (n=3), c_{11}=3, c_{12}=9, c_{13}=8 *и т. д. Требуется найти: а*) *начальный план методом наименьшей стоимости, б*) *оптимальный план перевозок методом потенциалов*.

1	9	31	20
20	3	9	8
14	4	6	7
12	2	4	5

2	10	7	18
15	6	3	7
18	4	2	9
12	5	3	8

3	20	12	37
15	5	3	7
10	3	2	3
21	6	4	8

4	17	21	8
24	5	7	4
16	4	8	3
20	6	9	4

5	40	12	20
17	8	4	9
30	6	3	7
15	5	2	4

6	14	20	30
25	4	5	9
10	2	3	3
12	4	6	8

7	40	120	170
90	5	6	8
65	6	9	10
75	4	7	5

8	25	40	35
20	3	6	4
90	5	9	3
60	4	8	6

9	16	20	35
15	6	7	5
8	5	6	4
20	9	10	6

10	20	12	8
22	7	6	3
18	8	4	2
16	2	3	1

11.1	70	5	45	70
60	1	2	9	7
55	3	40	15	5
40	6	4	8	3
85	24	3	3	1

11.2	25	30	40	15
20	1	3	3	8
20	8	6	2	6
40	7	7	3	8
45	5	2	4	5

12.1	46	18	12	15
20	2	2	9	7
16	3	4	6	1
14	5	1	2	2
11	4	5	8	1

12.2	35	80	25	70
30	1	9	7	2
40	3	1	5	5
70	6	8	3	4
60	2	3	1	3

13.1	20	60	55	45
35	6	1	2	5
70	3	4	3	8
45	2	5	4	3
80	2	7	3	6

13.2	25	80	40	15
10	1	3	3	8
20	8	6	2	6
35	4	7	7	3
45	5	2	4	5

14.1	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4
50	5	3	2	6

14.2	10	20	26	34
24	3	1	6	2
26	5	6	7	3
15	2	8	4	5
20	3	2	4	6

15.1	15	20	34	16
40	2	6	3	4
30	1	5	6	9
35	3	4	1	6
50	4	7	5	1

15.2	10	35	15	25
30	3	7	1	5
5	7	5	8	6
45	6	4	8	3
70	3	1	7	4

16.1	15	40	30	15
40	10	5	7	4
25	7	4	9	10
35	6	14	8	7
60	2	4	5	1

16.2	110	30	50	90
130	4	5	6	8
90	10	3	2	3
40	4	10	5	1
30	2	5	3	4

17.1	40	30	35	15
40	1	2	6	4
30	3	1	3	2
20	5	7	5	1
70	2	3	9	4

17.2	45	15	45	30
30	8	7	6	3
30	5	3	6	4
40	3	4	5	7
15	2	6	3	8

18.1	16	18	12	15
20	2	3	9	7
16	3	4	6	1
14	6	14	8	7
22	4	5	8	1

18.2	10	40	20	60
70	9	4	5	7
30	2	3	7	6
50	5	7	6	2
10	1	7	4	2

19.1	30	20	70	30

19.2	15	15	40	30

20.1	35	20	55	80

20.2	70	30	40	15

60	4	6	3	8
40	3	6	7	8
30	4	15	10	12
50	7	8	6	3

30	1	8	2	3
50	4	7	5	1
20	5	3	4	4
25	4	1	6	10

30	2	4	1	3
20	5	6	5	4
40	3	7	9	5
50	1	2	2	7

25	4	11	9	10
25	5	9	8	4
20	6	18	15	12
70	7	15	6	7

1-40. ТЗ с усложнениями

1	5	10	15	10
5	2	2	4	5
20	4	6	7	10
15	5	3	3	6
20	6	4	5	12
$A_4 \to B_3 = 0$; $A_2 \to B_2 = 5$.				

2	50	100	100	150
50	1	3	4	1
100	3	2	2	4
150	4	8	9	5
150	9	6	7	10
$A_3 \to B_4 = 0$; $A_4 \to B_3 = 50$.				

3	60	120	180	120
60	1	3	2	1
120	6	2	4	2
180	5	9	5	10
180	7	6	7	15
$A_3 \to B_3 = 0$; $A_4 \to B_2 = 75$				

4	70	140	210	140
70	1	2	1	3
140	2	4	5	8
210	3	5	6	9
210	4	6	7	10
$A_3 \to B_4 = 0$; $A_4 \to B_3 = 50$.				

5	80	160	240	160
80	2	5	2	3
160	3	4	4	5
80	4	3	6	7
160	5	2	5	4
$A_4 \to B_2 = 0$; $A_2 \to B_3 = 80$				

6	180	90	270	180
90	1	3	4	1
90	3	2	9	13
180	3	4	5	8
180	4	5	6	4
$A_3 \to B_1 = 0$; $A_4 \to B_4 = 90$				

7	50	25	50	75
50	1	1	3	4
25	7	2	4	2
50	8	9	5	6
50	6	7	8	5
$A_3 \to B_3 = 0$; $A_1 \to B_1 = 25$				

8	20	20	20	40
40	2	2	3	4
20	4	5	4	7
40	6	7	3	5
20	3	5	7	4
$A_3 \to B_1 = 0$; $A_4 \to B_4 = 90$				

9	10	5	10	15
20	2	2	4	5
5	4	6	7	10
20	5	3	3	6
15	6	4	5	12
$A_1 \to B_4 = 0$; $A_3 \to B_3 = 5$				

10	100	50	150	100
100	1	3	4	1
50	3	2	2	4
150	4	8	9	5
150	9	6	7	10
$A_4 \to B_1 = 0$; $A_1 \to B_4 = 50$				

11	100	200	300	300
100	4	3	5	2
200	7	1	2	3
300	9	2	4	5
100	1	3	6	4
$A_2 \to B_3 \geq 100$; $A_3 \to B_2 \leq 100$				

12	200	400	100	200
200	2	1	3	5
100	4	3	4	7
100	5	8	3	6
400	3	5	2	4
$A_4 \to B_2 \geq 200$; $A_1 \to B_1 \leq 100$				

13	10	20	30	40
10	3	1	3	4
50	5	1	2	2
60	2	3	4	6
40	7	2	5	3
$A_2 \to B_4 \geq 20$; $A_3 \to B_2 \leq 20$.				

14	20	20	40	40
20	4	5	2	4
40	3	1	3	5
80	2	7	6	8
40	3	3	1	4
$A_3 \to B_4 \geq 20$; $A_4 \to B_3 \leq 20$.				

15	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3
$A_4 \to B_2 \geq 100$; $A_3 \to B_3 \leq 100$.				

16	400	200	200	100
100	2	1	3	5
200	4	3	4	7
400	5	8	3	6
100	3	5	2	4
$A_1 \to B_2 \geq 50$; $A_2 \to B_1 \leq 100$.				

17	30	20	50	40
30	5	3	1	6
20	4	6	4	7
40	4	1	2	3
20	6	3	8	10
$A_3 \to B_2 \geq 10$; $A_4 \to B_4 \leq 20$.				

18	400	200	200	100
100	1	7	12	2
200	2	3	8	4
200	3	5	4	6
200	4	4	3	8
$A_2 \to B_4 \geq 50$; $A_1 \to B_3 \leq 50$.				

19	200	100	300	300
200	4	3	5	2
100	7	1	2	3
100	9	2	4	5
300	1	3	6	4
$A_3 \to B_2 \geq 50$; $A_2 \to B_3 \leq 50$.				

20	400	200	200	100
100	2	1	3	5
200	4	3	4	7
400	5	8	3	6
100	3	5	2	4
$A_2 \to B_4 \geq 50$; $A_1 \to B_1 \leq 50$.				

31	5	10	15	10
5	2	2	4	5
20	4	6	7	10
15	5	3	3	6
20	6	4	5	12
Полный вывоз A_2, A_4				

32	50	100	100	150
50	1	3	4	1
100	3	2	2	4
150	4	8	9	5
150	9	6	7	10
Полный вывоз A_3, A_4				

33	60	120	180	120
60	1	3	2	1
120	6	2	4	2
180	5	9	5	10
180	7	6	7	15
Полный вывоз A_3, A_4				

34	70	140	210	140
70	1	2	1	3
140	2	4	5	8
210	3	5	6	9
210	4	6	7	10
Полный вывоз A_2, A_4				

35	20	20	20	40

36	80	160	240	160

40	2	2	3	4
20	4	5	4	7
40	6	7	3	5
20	3	5	7	4
Полный вывоз A_1, A_2				

80	2	5	2	3
160	3	4	4	5
80	4	3	6	7
160	5	2	5	4
Полный ввоз B_1, B_4				

37	180	90	270	180
90	1	3	4	1
90	3	2	9	13
180	3	4	5	8
180	4	5	6	4
Полный ввоз B_2, B_4				

38	50	25	50	75
50	1	1	3	4
25	7	2	4	2
50	8	9	5	6
50	6	7	8	5
Полный ввоз B_1, B_3				

39	100	200	300	300
100	4	3	5	2
200	7	1	2	3
300	9	2	4	5
100	1	3	6	4
Полный ввоз B_2, B_3				

40	200	400	100	200
200	2	1	3	5
100	4	3	4	7
100	5	8	3	6
400	3	5	2	4
Полный ввоз B_1, B_2				

1–26. Транспортная задача по критерию времени

1	50	30	20
50	10	6	4
30	7	6	6
10	12	3	9
10	2	17	7

2	32	40	68
70	9	13	32
30	16	12	16
30	13	7	5
10	12	7	13

3	20	30	50
10	9	5	2
20	4	2	10
40	6	7	5
30	3	8	4

4	36	24	40
10	12	13	14
50	8	12	13
10	5	4	2
30	12	8	3

5	10	70	20
10	7	10	6
10	11	19	9
40	18	9	20
40	5	8	6

6	30	30	40
20	10	4	3
20	5	5	11
40	7	8	4
20	6	7	3

7	20	30	50
10	9	5	2
20	4	2	10
40	6	7	5
30	3	8	4

8	20	30	50
20	7	4	5
20	10	8	5
30	7	6	8
30	3	6	4

9	30	10	60
30	6	3	4
10	11	9	6
20	8	5	9
40	2	7	3

10	60	10	50
24	16	13	14
16	2	5	6
40	14	6	8
40	12	5	3

11	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

12	15	5	10	20
15	5	10	7	1
5	2	8	4	6
30	3	5	8	2

13	10	10	15	15
10	6	9	6	2
15	3	7	5	5
25	4	4	7	3

14	12	8	20	20
30	15	1	13	11
5	12	4	5	4
25	13	5	7	2

15	25	15	5	5
25	9	6	11	1
15	5	5	2	16
10	3	5	8	6

16	5	25	5	15
18	11	7	4	11
12	12	11	3	7
20	13	12	1	2

17	35	15	15	5
16	8	15	12	11
20	12	11	6	6
34	31	15	4	12

18	10	10	20	10
15	9	4	6	5
15	3	4	7	6
20	2	10	3	2

19	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

20	5	5	20	20
5	6	10	17	4
35	9	18	8	7
10	5	8	19	5

21	5	15	15	10
15	15	6	7	1
30	12	8	4	6

22	5	5	15	15
5	6	10	17	4
35	9	18	8	7

23	20	40	50	70
30	13	8	7	11
40	6	7	9	8
50	5	12	5	10
60	19	6	14	4

24	10	3	17	20	10
35	3	5	6	11	2
15	4	6	3	2	3
10	6	7	8	11	2

25	25	15	10	2	8
35	9	16	9	11	11
5	11	6	5	6	5
20	8	11	6	3	7

26	200	200	200	200
200	8	7	6	5
100	7	6	5	7
200	4	5	6	7
300	5	7	6	4

Задача о назначениях

1–20. *Имеется n рабочих и m видов работ. Стоимость* c_{ij} *выполнения i-м рабочим j-й работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом – работа. Необходимо составить план работ так, чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была минимальной.*

$$\mathbf{1}\begin{pmatrix}3&6&2&5&11\\7&2&1&11&3\\5&12&1&9&11\\2&4&2&10&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{2}\begin{pmatrix}1&3&6&7&5\\2&5&7&8&3\\1&5&3&2&9\\2&4&6&10&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{3}\begin{pmatrix}9&4&8&5&7\\2&1&9&8&3\\3&1&8&2&9\\2&3&4&4&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{4}\begin{pmatrix}8&6&2&5\\5&2&9&8\\3&8&1&9\\1&4&2&3\\3&7&10&5\end{pmatrix}\mathbf{5}\begin{pmatrix}10&3&2&4\\5&9&10&8\\7&8&1&9\\11&10&9&12\\2&7&8&10\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{6}\begin{pmatrix}9&3&2&7\\5&4&9&8\\7&8&1&10\\1&9&10&3\\3&7&8&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{7}\begin{pmatrix}9&4&6&2&1\\6&8&10&2&4\\7&3&10&1&5\\7&1&5&3&9\end{pmatrix}\quad \mathbf{8}\begin{pmatrix}10&8&6&2&7\\6&8&9&2&3\\3&7&10&1&5\\9&10&3&2&4\end{pmatrix}\quad \mathbf{9}\begin{pmatrix}5&4&1&2&10\\6&8&10&4&4\\10&7&11&3&8\\10&1&5&11&9\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{10}\begin{pmatrix}5&12&2&7\\10&8&7&13\\7&13&11&5\\2&7&2&3\\13&9&8&13\end{pmatrix}\quad \mathbf{11}\begin{pmatrix}5&6&4&7\\4&5&3&6\\4&5&5&7\\5&4&3&6\\6&3&4&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{12}\begin{pmatrix}4&5&3&5\\6&5&4&6\\3&4&3&5\\5&4&3&4\\4&4&5&4\end{pmatrix}\quad \mathbf{13}\begin{pmatrix}3&4&5&5\\3&5&4&4\\5&5&4&5\\4&4&5&4\\3&5&4&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{14}\begin{pmatrix}4&4&3&5\\4&5&3&6\\5&5&4&3\\3&3&4&3\\4&4&5&3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{15}\begin{pmatrix}5&4&6&5\\6&4&5&5\\5&4&6&6\\4&5&5&5\\4&6&4&4\end{pmatrix}\quad \mathbf{16}\begin{pmatrix}6&5&4&5\\5&6&4&6\\6&7&5&7\\5&5&6&6\\4&4&6&7\end{pmatrix}\quad \mathbf{17}\begin{pmatrix}3&4&6&5\\4&5&6&6\\3&6&5&4\\6&6&5&5\\5&3&4&5\end{pmatrix}\quad \mathbf{18}\begin{pmatrix}5&6&7&6\\6&4&5&6\\5&5&6&7\\4&7&4&4\\5&6&7&6\end{pmatrix}\quad \mathbf{19}\begin{pmatrix}7&6&8&7\\6&5&6&7\\6&7&5&6\\6&5&7&6\\4&7&6&4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{20}\begin{pmatrix}6&7&4&6\\7&6&5&6\\6&5&4&5\\4&4&4&7\\7&5&6&5\end{pmatrix}$$

21 (10 вариантов) *Для задач о назначениях*:

1) *составить математическую модель задачи применительно к числовым данным выполняемого варианта;*

2) *решить полученную задачу венгерским методом и сформулировать ответ в экономических терминах в соответствии с условия-*

ми задачи.

Формулировка задачи. Имеется 4 вакантных места по разным специальностям, на которые претендуют 6 человек. Проведено тестирование претендентов, результаты которого в виде баллов приведены в таблице $C=\{c_{ij}\}.i=1\div4$, $j=1\div6$. Необходимо распределить претендентов на вакантные места так, чтобы на каждое место был назначен человек с наибольшим набранным по тестированию баллов.

Значения	**Варианты**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
c_{11}	8	5	3	4	3	5	9	5	4	6
c_{12}	5	6	4	3	7	6	5	3	5	6
c_{13}	6	7	7	6	5	7	6	3	6	5
c_{14}	7	3	5	5	5	3	6	6	3	6
c_{15}	5	9	6	6	8	5	7	8	3	7
c_{16}	4	7	7	5	7	4	5	7	7	5
c_{21}	7	6	3	3	5	6	6	6	5	7
c_{22}	6	4	5	4	9	7	7	4	8	8
c_{23}	5	8	8	8	4	9	4	6	9	9
c_{24}	6	4	4	9	6	4	3	5	6	4
c_{25}	4	7	6	7	5	4	5	9	3	3
c_{26}	6	5	7	4	4	5	6	5	5	5
c_{31}	6	5	5	4	4	4	7	3	5	5
c_{32}	3	3	5	5	8	5	8	6	6	4
c_{33}	6	8	9	7	6	8	3	5	7	7
c_{34}	5	4	6	8	5	3	5	7	5	5
c_{35}	3	8	7	7	6	6	4	6	6	4
c_{36}	7	4	6	5	3	6	5	6	3	6
c_{41}	4	4	4	5	6	3	7	3	6	6
c_{42}	5	5	6	3	9	5	7	6	7	5
c_{43}	4	9	6	6	3	4	4	4	6	5
c_{44}	8	5	5	5	4	4	6	6	4	3
c_{45}	6	6	8	5	4	5	3	9	4	3
c_{46}	5	5	5	3	5	5	4	5	5	4

Нелинейное программирование

1-55. *Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функций.*

1	**2**	**3**	**4**	**5**
$z=x_1+2x_2$, $x_1^2+x_2^2\leq25$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=2x_1+x_2$, $x_1^2+x_2^2\leq16$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=x_1+2x_2$, $x_1^2+x_2^2\leq9$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=x_1+3x_2$, $x_1x_2\leq8$, $0\leq x_1\leq6$, $0\leq x_2\leq4$.	$z=3x_1+x_2$, $x_1x_2\geq2$, $x_1^2+x_2^2\leq16$, $x_2\geq0$.
6	**7**	**8**	**9**	**10**
$z=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$, $3x_1+2x_2\leq7$, $10x_1-x_2\leq8$, $-18x_1+4x_2\leq12$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$, $2x_1+3x_2\geq6$, $3x_1-2x_2\leq18$, $-x_1+2x_2\leq8$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$, $x_1+2x_2\leq12$, $x_1+x_2\leq9$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-6)^2+(x_2-3)^2$, $2x_1+3x_2\leq14$, $3x_1+2x_2\leq15$, $x_j\geq0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2$, $x_1+2x_2\leq8$, $3x_1+x_2\leq15$, $x_1+x_2\geq1$, $x_1\geq0$, $x_2\geq0$.
11	**12**	**13**	**14**	**15**

$z=(x_1-2)^2+(x_2-4)^2$, $2x_1+5x_2\le30$, $2x_1+x_2\le14$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-7)^2+(x_2-3)^2$, $2x_1+5x_2\le30$, $2x_1+x_2\le14$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2$, $x_1+2x_2\le8$, $3x_1+x_2\le15$, $x_1+x_2\ge1$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$	$z=4(x_1-2)^2+2(x_2-2)^2$, $x_1+x_2\le7$, $2x_1-x_2\le8$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2$, $2x_1+5x_2\le30$, $2x_1+x_2\le14$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$
16	**17**	**18**	**19**	**20**
$z=(x_1-12,5)^2+(x_2-5)^2$, $13x_1+6x_2\le90$, $8x_1+11x_2\le88$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$	$z=2x_1-0,2\,x_1^2$ + $+3x_2-0,2\,x_2^2$, $2x_1+3x_2\le13$, $2x_1+x_2\le10$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=-2x_1+0,1\,x_1^2$ - $-3x_2+0,1\,x_2^2$, $5x_1+13x_2\le51$, $15x_1+7x_2\le105$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=x_1^2+x_2^2$, $(x_1-x_2)^2\ge9$, $(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le36$, $x_1+x_2\ge8$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=-6x_1+x_1^2-4x_2+x_2^2$, $4x_1+3x_2\le24$, $x_1^2-5x_1+x_2^2\le6$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.
21	**22**	**23**	**24**	**25**
$z=(x_1-3)^2+(x_2-0,5)^2$, $4-x_1^2-x_2^2\le0$, $x_1^2+32x_2^2-32\le0$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$, $x_1^2+x_2^2\le16$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$, $x_1^2+x_2^2\le36$, $x_j\ge0$, $j=1, 2$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$, $(x_1-1)(x_2+1)\ge4$, $x_1\ge0$, $0\le x_2\le3$.	$z=x_1^2+x_2^2$, $x_1x_2\le4$, $x_1+x_2\ge5$, $0\le x_1\le7$, $0\le x_2\le6$.
26	**27**	**28**	**29**	**30**
$z=(x_1-2)^2+x_2^2$, $2x_1^2-2x_2-1\le0$, $x_1-2x_2+2\ge0$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$, $x_1^2-8x_2-8\ge0$, $5x_1-4x_2-28\le0$, $x_1\ge0$, $x_2\le3$.	$z=(x_1-1)^2+(x_2-4)^2$, $x_2^2+2x_1-4\le0$, $2x_1+2x_2\ge1$.	$z=(x_1-\frac{3}{4})^2+(x_2+\frac{1}{2})^2$, $(2x_2+1)^2-2x_1\ge0$, $2x_2-1\le0$, $x_1\ge0$.	$z=(x_1-\frac{2}{3})^2+(x_2-4)^2$, $3x_2^2+6x_1-10\le0$, $3x_1+4x_2\ge5$
31	**32**	**33**	**34**	**35**
$z=x_1^2+(x_2-2)^2$, $2x_2^2-2x_1-1\le0$, $2x_1-7\le0$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2+8)^2$, $2(x_2-1)^2+x_1-2\le0$, $x_1-x_2+2\ge0$.	$z=x_1^2+(x_2-\frac{7}{2})^2$, $x_1-x_2-1\le0$, $x_1+2x_2-2\le0$.	$z=x_1^2+(x_2-4)^2$, $x_2^2-2x_1-2\le0$, $x_1+x_2-11\le0$.	$z=(x_1-\frac{3}{4})^2+(x_2-8)^2$, $2x_2^2+x_1-1\le0$, $4x_1+5\ge0$, $x_2\ge0$.
36	**37**	**38**	**39**	**40**
$z=(x_1-3)^2+(x_2-8)^2$, $x_2^2-4x_1+4\le0$, $2x_1+x_2-14\ge0$.	$z=x_1^2+(x_2-\frac{1}{2})^2$, $x_2^2-2x_1-2\ge0$, $4x_1-5x_2+10\ge0$, $x_1\le0$, $x_2\ge0$.	$z=(x_1-16)^2+(x_2-4)^2$, $x_1^2+8x_2-64\le0$, $x_1+x_2-2\ge0$.	$z=(x_1+2)^2+(x_2-3)^2$, $(x_1+2)^2-2x_2\ge0$, $x_1\le2$, $x_2\ge0$.	$z=(x_1-6)^2+(x_2-1)^2$, $2\,x_2^2+6x_2-15\le0$, $8x_1+6x_2-15\ge0$.
41	**42**	**43**	**44**	**45**
$z=(x_1-8)^2+x_2^2$, $x_1^2-4x_2-8\le0$, $x_2-14\le0$.	$z=(x_1+9)^2+(x_2+1)^2$, $2\,x_1^2+x_2+1\le0$, $x_1-x_2-4\le0$.	$z=(x_1+14)^2+x_2^2$, $x_1-x_2-4\le0$ $2x_1+x_2+8\ge0$, $x_2\ge6$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2+\frac{7}{2})^2$, $x_1^2-x_2-4\le0$, $x_1+x_2-2\le0$.	$z=(x_1-32)^2+(x_2-3)^2$, $x_1^2+2x_2-8\le0$, $x_2+5\ge0$, $x_1\ge0$.
46	**47**	**48**	**49**	**50**
$z=x_1^2+(x_2-4)^2$, $x_2^2-2x_1-2\le0$, $2x_1-x_2-4\le0$.	$z=(x_1-1)^2+x_2^2$, $x_1^2-4x_2-8\ge0$, $5x_1-4x_2-20\le0$, $x_1\ge0$, $x_2\le0$.	$z=(x_1-8)^2+(x_2-2)^2$, $x_1^2+4x_2-16\le0$ $x_1+x_2-1\ge0$.	$z=(x_1-\frac{3}{2})^2+(x_2+1)^2$, $x_1-(x_2+1)^2\le0$, $x_1\ge0$, $x_2\le1$.	$z=(x_1-2)^2+(x_2-12)^2$, $x_1^2+6x_1-30\le0$, $3x_1+4x_2-15\le0$.

51	52	53	54	55

$z=(x_1-4)^2+x_2^2$, $x_1^2-2x_2-2\le 0$, $x_2-7\le 0$.	$z=(x_1-4)^2+(x_2+16)^2$, $x_1+(x_2-2)^2-4\le 0$, $x_1-x_2+4\ge 0$.	$z=x_1^2+(x_2-7)^2$, $x_1-x_2-2\le 0$, $x_1+3\ge 0$, $x_1+2x_2-4\le 0$.	$z=(x_1+7)^2+(x_2-4)^2$, $x_2^2-2x_1-16\le 0$, $x_1+x_2-4\le 0$.	$z=(x_1-16)^2+(x_2-\frac{3}{2})^2$, $x_1^2+x_2-2\le 0$, $2x_2+5\ge 0$, $x_1\ge 0$.

56-65. *Дана задача с линейной целевой функцией* $z=c_1x_1+c_2x_2$ *и нелинейной системой ограничений. Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции, при этом с* **56-й по 60-ю задачи** *принять ограничения вида*

$$x_1^2+x_2^2\le b_1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$$

с 61-й по 65- ю задачи – *вида* $x_1x_2\le b_1$, $0\le x_1\le b_2$, $0\le x_2\le b_3$.

Значения	Задача									
	56	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**
c_1	*2*	*1*	*-1*	*2*	*-3*	*2*	*3*	*-2*	*2*	*-1*
c_2	*3*	*2*	*-2*	*1*	*-1*	*3*	*2*	*-1*	*1*	*-2*
b_1	16	36	25	4	9	3	2	5	4	2
b_2	–	–	–	–	–	4	6	5	7	8
b_3	–	–	–	–	–	5	7	4	5	6

66-75. *Используя графический метод, найти глобальные экстремумы в задаче*

$$z=(x_1+a)^2+(x_2+b)^2,$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1,\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Значения	Задача									
	66	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**
a	-5	-6	-1	-2	-3	-1	-3	-2	-2	1
b	-4	-2	-1	-1	-4	-1	-1	-6	-2	-1
a_{11}	5	2	5	2	3	3	3	3	6	6
a_{12}	-4	5	-4	5	8	5	8	5	7	7
b_1	-20	20	-20	20	24	15	24	15	42	42
a_{21}	3	2	3	2	4	5	4	5	3	3
a_{22}	2	1	2	1	7	3	7	3	-2	-2
b_2	30	10	30	10	28	15	25	15	-6	-6

76- 85. *Дана задача с целевой функцией* $z=(x_1+a)^2+(x_2+b)^2$. *Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции, при этом* **с 76-й по 80-ю задачи** *принять ограничения вида* $x_1x_2\le b_1$, $x_1\le b_2$, $x_2\le b_3$, $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$; **с 81-й по 85 - ю задачи** – *вида* $x_1^2+x_2^2\le b_1$, $x_1\le b_2$, $x_2\le b_3$, $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

Значения	Задача									
	76	**77**	**78**	**79**	**80**	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**
a	1	-2	1	-1	2	-1	-1	1	0	-2
b	-1	1	-2	-1	2	-2	1	-1	-2	0
b_1	4	5	6	3	2	16	25	36	4	9
b_2	6	5	4	5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	2,8
b_3	5	6	5	4	6	3,5	4,5	5,5	6,5	2,8

86–125. *Для следующих задач*

1) *составить математическую модель задачи применительно к числовым данным выполняемого варианта;*

2) *решить полученную задачу с помощью MathCAD как задачу нелинейного программирования;*

3) *графическим методом решить полученную задачу и сформулировать ответ в экономических терминах в соответствии с условиями задачи.*

Формулировка задачи. Предприятие выпускает изделия *A* и *B*, при изготовлении которых используется сырьё S_1 и S_2. Известны запасы b_i (i=1,2) сырья, нормы a_{ij} (j=1,2) его расхода на единицу изделия, плановая себестоимость c_j^0 и оптовые цены p_j. Как только объём выпускаемой продукции перестаёт соответствовать оптимальным размерам предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведёт к повышению себестоимости продукции, и в первом приближении фактическая себестоимость c_j описывается функцией $c_j=c_j^0+c'x_j$, где c' – некоторая постоянная величина. При поиске плана выпуска изделий, обеспечивающего предприятию наивысшую прибыль в условиях нарушения баланса между объёмом выпуска и оптимальными размерами предприятия, целевая функция принимает вид

$$z=(p_1-(c_1^0+c'x_1))x_1+(p_2-(c_2^0+c'x_2))x_2,$$

а ограничения по сырью

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

(нормы расхода сырья a_{ij} от x_j не зависят). Необходимые числовые данные указаны в таблице.

Номер задачи	b_1	b_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	c'
86	90	88	13	6	8	11	12	10	7	8	0,2
87	30	60	5	2	8	11	8	7	6	4	0,1
88	60	10	11	8	1	2	10	11	7	9	0,1
89	14	42	1	4	7	3	15	13	14	11	0,2
90	7	10	1	1	1	2	12	11	9	10	0,2
91	51	105	5	13	15	7	15	13	13	10	0,1
92	40	84	4	7	12	7	11	17	9	14	0,2
93	13	10	2	3	2	1	14	16	12	13	0,2
94	72	10	9	8	1	2	23	19	20	13	0,3
95	84	31	7	12	5	3	21	27	15	24	0,3
96	15	52	2	1	4	13	8,6	5,4	5	4,6	0,2
97	22,5	104	3	1,5	8	26	5	4	2,25	3,25	0,125
98	30	102	4	2	6	17	12	14	8	12	0,2
99	51	105	3	8,5	14	7	12	8	5	4,5	0,25
100	45	136	6	3	8	17	13	12	7,4	7,2	0,4
101	7,5	68	1	0,5	7	8,5	12,75	16	10	14	0,125
102	60	125	8	4	11	15	8	9	4,8	5,4	0,2
103	12	82,5	1,6	0,8	5,5	7,5	17	22,5	11	17	0,25
104	75	228	10	5	12	19	12	20	6,4	11,2	0,4

105	37,5	114	5	2,5	6	9,5	15,5	21,75	12,75	18,5	0,125
106	90	260	12	6	13	20	6	8	3,6	2,8	0,2
107	22,5	130	3	1,5	6,5	10	17	18,5	12	11	0,25
108	12	60	1	2	10	6	5	8	2,6	2,4	0,4
109	18	30	1,5	3	5	3	6,25	6,25	5	4	0,125
110	24	80	2	4	10	8	21	18,6	19	16,2	0,2
111	30	40	2,5	5	5	4	4	7	1	3	0,25
112	36	10	3	6	1	1	8	6	2,4	2	0,4
113	42	20	3,5	7	2	2	4	2,25	2	0,5	0,125
114	48	140	4	8	14	10	15,6	23,8	12	22,2	0,2
115	54	70	4,5	9	7	5	9	5	4	2	0,25
116	52	15	4	13	2	1	6,46	9,6	5,6	6	0,2
117	104	22,5	8	26	3	1,5	5	6	4,25	3,25	0,125
118	5	30	0,5	1	5,5	4	9	8	6	6	0,1
119	42	7	7	3	0,5	2	12	14	11	12	0,2
120	5	7	0,5	1	1	1	11	12	8	11	0,2
121	105	51	15	7	5	13	10	10	8	7	0,1
122	125	60	11	15	8	4	7	8	3,8	4,4	0,2
123	82,5	12	5,5	7,5	1,6	0,8	10	10	4	4,5	0,25
124	228	75	12	19	10	5	8	16	2,4	7,2	0,4
125	114	37,5	6	9,5	5	2,5	10	10,25	7,25	7	0,125

126 (8 вариантов). Используя метод множителей Лагранжа, найти условные экстремумы функций

126. 1
$z=x_1^2+x_2^2+x_3$
$x_1+x_2+x_3=4$

126. 2
$z=4x_1-x_2^2-3x_3^2$
$x_1+2x_2+3x_3=6$

126. 3
$z=2-x_1x_2-2x_1x_3-x_2x_3$
$x_1+x_2=4-x_3$

126. 4
$z=x_1x_2+2x_3-5x_1^2-2x_2^2$
$x_1+2x_2+x_3=10$

126. 5
$z=-x_1^2-2x_2^2+2x_3$
$2x_1-3x_2+x_3=12$

126. 6
$z=x_1+2x_2^2+4x_3^2$
$2x_1-x_2-x_3=6$

126. 7
$z=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$
$x_1+x_2=8-x_3$

126. 8
$z=3x_1^2+2x_1+2x_2^2+4x_2x_3$
$x_1-x_2+x_3=15/4$

Дробно-линейное программирование

1-10. *Найти графически глобальные максимум и минимум дробно-линейных функций (переменные неотрицательны).*

1	2	3	4	5
$z=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1+x_2}$ $2x_1-3x_2\geq-13$, $x_1+x_2\geq6$, $4x_1-x_2\leq19$	$z=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}$ $x_1+x_2\geq5$, $-x_1+3x_2\leq7$, $3x_1-x_2\leq11$	$z=\dfrac{3x_1+7x_2}{x_1+x_2}$ $x_1-2x_2\leq1$, $x_1+x_2\geq4$, $2x_1+x_2\leq12$, $5x_1-x_2\geq2$	$z=\dfrac{2x_1-x_2-3}{x_1+2}$ $x_1+x_2\geq5$, $2x_1-x_2\geq1$, $x_1-3x_2\leq1$	$z=\dfrac{2x_1+x_2}{x_1+x_2}$ $x_1+2x_2\geq11$, $x_1-x_2\leq8$, $-x_1+3x_2\leq9$
6	**7**	**8**	**9**	**10**
$z=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}$ $2x_1-3x_2\leq2$, $2x_1+x_2\leq6$	$z=\dfrac{3x_1-2x_2}{x_1+2x_2}$ $2x_1+4x_2\leq16$, $-4x_1+2x_2\leq8$, $x_1+3x_2\geq9$	$z=\dfrac{-5x_1+4x_2}{-2x_1-3x_2}$ $2x_1-4x_2\leq12$, $-x_1+2x_2\leq8$, $x_1+x_2\geq10$	$z=\dfrac{5x_1+3x_2}{x_1+3x_2}$ $2x_1+3x_2\geq12$, $-x_1+6x_2\leq18$, $x_1-3x_2\leq3$	$z=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}$ $x_1+x_2\geq5$, $-x_1+3x_2\leq7$, $3x_1-x_2\leq1$

11 (30 вариантов) *Решить задачу ДЛП*

$$z=\frac{e_1x_1+e_2x_2+e_0}{f_1x_1+f_2x_2+f_0}\to\max,$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{12}x_3+a_{14}x_4=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{22}x_3+a_{24}x_4=b_2,$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Все необходимые числовые данные указаны в таблице.

№№	e_1	e_2	e_0	f_1	f_2	f_0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_1	b_2
1	-1	4	0	1	1	2	-4	2	-1	1	9	0	2	-1	4	4
2	4	0	3	1	1	1	-1	4	1	-2	2	7	1	1	1	13
3	-3	2	0	1	2	1	4	3	1	-1	2	1	1	-1	7	1
4	-2	2	1	1	1	1	3	3	2	1	1	-1	-2	1	19	3
5	1	1	0	1	4	4	3	4	1	1	1	0	-1	1	10	2
6	2	-2	1	1	1	1	0	5	-1	1	2	7	1	1	4	12
7	-1	1	0	4	1	2	11	2	1	1	9	0	1	-1	11	5
8	2	3	0	2	1	2	1	0	-1	1	7	2	1	1	2	16
9	2	1	0	1	2	2	5	3	1	1	-1	1	3	-1	8	0
10	2	2	1	3	1	1	9	3	1	1	0	2	2	-1	11	1
11	3	1	0	3	2	3	3	0	-1	1	3	2	3	-1	2	6
12	3	-1	2	1	1	2	1	-4	2	-1	0	5	-1	1	1	3
13	-1	2	0	2	1	4	-4	1	-1	1	9	0	2	-1	3	6
14	4	0	-5	2	1	5	2	1	1	-1	0	1	-1	2	4	6
15	1	2	0	2	1	1	4	-1	1	-1	6	3	1	1	1	7
16	1	-2	2	1	1	1	4	2	1	1	-1	1	2	-1	2	4
17	-1	3	0	4	3	2	-7	6	-1	3	9	0	1	-1	2	4
18	6	1	2	2	1	1	1	2	-1	1	3	4	1	1	0	8
19	1	1	1	1	2	3	0	1	2	-1	4	1	-2	3	3	9
20	-2	3	0	2	1	1	-1	2	3	-1	2	-1	-2	1	2	2
21	1	3	0	1	1	2	1	1	1	-1	2	1	0	1	3	4
22	2	-1	3	1	1	1	-1	1	1	-1	4	0	-1	2	1	4
23	4	-1	0	2	2	1	-2	4	1	-1	6	-3	2	1	0	1
24	-3	1	0	1	1	1	-4	1	2	-1	7	2	1	1	2	10
25	2	1	0	1	2	3	1	2	3	-1	3	2	1	1	9	11
26	5	3	2	3	1	3	3	-1	-1	1	0	-3	-2	1	6	2
27	-1	3	0	1	1	1	3	3	1	1	0	3	2	-1	9	3
28	3	1	0	1	1	5	0	1	-1	2	1	1	1	-1	2	6
29	3	2	0	3	4	2	6	1	-1	3	0	1	1	-1	10	2
30	-1	1	0	3	1	1	3	-1	-1	1	0	3	2	-1	2	2

12 (10 вариантов). *Решить следующую задачу дробно-линейного программирования. Для производства двух изделий A и B предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на данном типе оборудования. Время обработки каждого из изделий, затраты, связанные с производством одного изделия, даны в таблице.*

Оборудование 1-*го и* 3-*го типов предприятие может использовать не менее* b_1 *и* b_3 ч *соответственно, оборудование* 2-*го типа — не более* b_2 ч. *Определить, сколько изделий следует изготовить пред-*

приятию, чтобы средняя себестоимость одного изделия была минимальной.

Тип оборудования	Затраты времени на обра-	
	A	B
1	a_{11}	a_{12}
2	a_{21}	a_{22}
3	a_{31}	a_{32}
Затраты на производство одно-	c_1	c_2

Значения коэффициентов условия задачи										
	№ варианта									
Значения	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
c_1	1	3	1	4	1	2	5	3	2	5
c_2	2	1	4	2	3	4	3	4	5	2
a_{11}	12	12	7	8	8	8	4	11	16	12
a_{12}	4	1	4	3	6	10	8	1	4	6
b_1	48	12	28	24	48	80	32	11	32	70
a_{21}	10	10	5	1	6	12	9	4	7	8
a_{22}	5	4	10	1	9	6	5	6	5	9
b_2	50	40	45	5	54	72	45	24	35	72
a_{31}	1	5	2	2	8	3	10	1	2	1
a_{32}	1	8	11	8	1	14	2	10	7	10
b_3	6	30	22	16	8	42	20	10	14	12

Целочисленное программирование

1 (10 вариантов). *Решить задачу целочисленного программирования методом отсечений Гомори.*

Трубы длиной L м, имеющиеся в достаточном количестве, следует распилить на заготовки двух видов: длиной l_1 м и длиной l_2 м, причём заготовок первого вида должно быть получено не менее n_1 штук и заготовок второго вида – не менее n_2 штук. Каждая труба может быть распилена на указанные заготовки несколькими способами. Требуется найти число труб, распиливаемых каждым способом, с тем, чтобы необходимое количество заготовок было получено из наименьшего количества труб.

Для решения задачи необходимо определить всевозможные варианты распила труб на заготовки нужной длины, составить математическую модель в виде задачи целочисленного программирования, решить задачу методом отсечений Гомори, найти все оптимальные решения задачи.

	Вариант									
Значения	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
L, м	2,9	2,0	2,7	3,0	3,3	3,8	3,7	4,2	3,2	4,5
l_1, м	0,8	0,9	0,8	1,2	1,0	1,4	1,1	1,6	0,9	1,7
l_2, м	1,2	0,5	1,1	0,9	1,3	1,2	1,5	1,3	1,4	1,4
n_1	78	60	45	50	63	80	87	92	75	86
n_2	70	90	56	81	70	99	62	78	65	90

12. Литература

1. Программирование: математическая логика: учебное пособие для вузов / М.В. Швецкий, М.В. Демидов, А.В. Голанова, И.А. Кудрявцева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2022. – 675 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-11009-8. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт: [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/495357 (дата обращения: 14.02.2022)..
2. Набатова Д.С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений: учебник и практикум для вузов / Д.С. Набатова. – М.: Юрайт, 2022. – 292 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02699-3. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт: [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/489303.
3. Королев А.В. Экономико-математические методы и моделирование: учебник и практикум для вузов / А.В. Королев. – М.: Юрайт, 2022. – 280 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00883-8. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт: [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/490234.
4. Семакин И.Г. Программирование, численные методы и математическое моделирование: учебное пособие / И.Г. Семакин, О.Л. Русакова, Е.Л. Тарунин, А.П. Шкарапута. – М.: КноРус, 2021. – 298 с. – ISBN 978-5-406-08626-1. – URL: https://book.ru/book/940464.
5. Хуснутдинов Р.Ш. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 224 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-16-005313-4. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1039180.
6. Белько И.В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: учебное пособие / И.В. Белько, И.М. Морозова, Е.А. Криштапович. – М.: ИНФРА-М, 2022. – 299 с.: ил. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-011748-5. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1862599.
7. Татарников О.В. Линейная алгебра и линейное программирование для экономистов: учебник / О.В. Татарников, В.Г. Шершнев, Е.В. Швед. – М.: КноРус, 2020. – 258 с. – ISBN 978-5-406-07502-9. – URL: https://book.ru/book/932561.
8. Холявин И.И. Игровые экономические модели и оптимизационный подход в экономике. Введение в теорию игр: учебно-методическое пособие для студентов экономических вузов / И.И. Холявин. – Гатчина: Изд-во ГИЭФПТ, 2018.
9. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию: учебное пособие для бакалавров / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 9-е изд., стер. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2020. – 432 с. – ISBN 978-5-394-03710-8. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1091871.

Иван Иванович Холявин
кандидат физико-математических наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие
для студентов экономических вузов

Часть 1

Публикуется в авторской редакции
Технический редактор В. Андронатий
Компьютерная верстка И. Иванова

Подписано в печать 10.03.22 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$

Усл.печ.л. 6,5 Тираж 550 экз. Заказ 1399

Издательство Государственного института экономики, финансов, права и технологий
188300 Ленинградская обл., г. Гатчина, ул. Рощинская, д. 5

Цена свободная